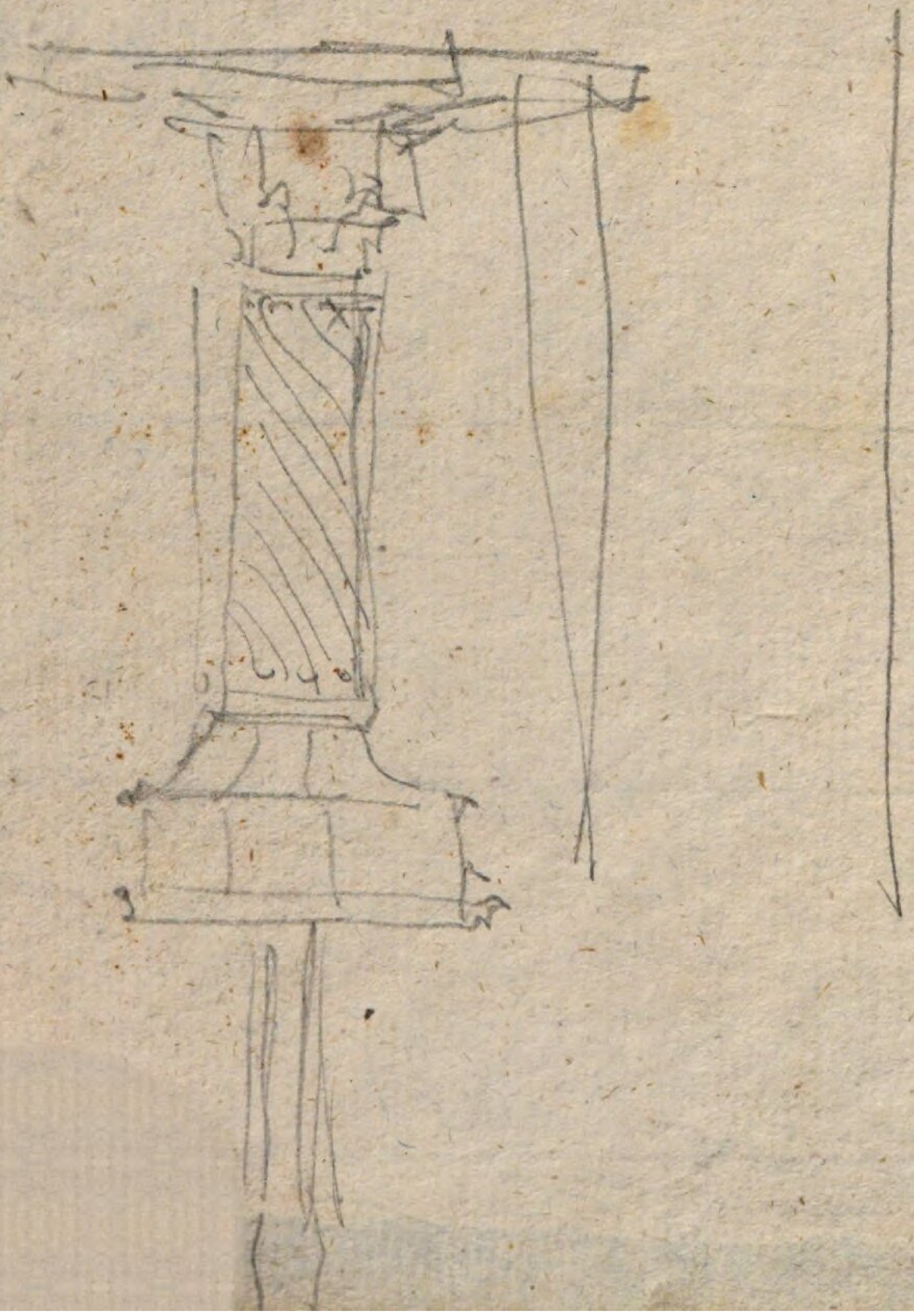
11 n.v.

~~E 18~~

Os 59
/1 n.v.



A 225

A

Elementarlehre

der

technischen Geometrie,

zum Gebrauche

für

Bürger- und Gewerbschulen.

Von

Dr. Creizenach.

Erster Theil.

Die Grundlehren der Planimetrie, der Stereometrie und der darstellenden Geometrie enthaltend.

Mit 107 geometrischen Figuren.

Frankfurt am Main 1829.
Gedruckt und verlegt bei J. D. Sauerländer.

STRAUBING
STRAUBING

131516663

Bibliothek Passau

Vorrede.

Schon der Titel dieses Werkchens zeigt, daß es nach einem andern Maaßstabe zu beurtheilen ist, als mathematische Werke, die mit größern Ansprüchen auftreten. Der Verfasser hat sich bemüht, es in allen Stücken den Bedürfnissen des ehrwürdigen Standes anzupassen, dem es bestimmt ist, und ist sich bewußt, die besten Hülfsmittel der neuern Literatur nicht unbenutzt gelassen zu haben. Auch entgehen ihm keineswegs die Unvollkommenheiten seiner so leicht scheinenden Arbeit; er nährt aber die Hoffnung, daß die Nachsicht der Sachkenner ihm Gelegenheit verschaffen werde, diese Mängel durch eine folgende Auflage zu beseitigen. Sollte ihn diese Hoffnung nicht täuschen,

so wird diesem ersten Bändchen unmittelbar ein zweites von etwas größerem Umfange folgen, welches Perspektiv, Schattenlehre, Gnomomik, die ebene Trigonometrie und die darstellende Geometrie der krummen Flächen enthalten wird.

Erster Abschnitt.

Von der geraden Linie und den Winkeln.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft, welche sich mit der Ausdehnung der Raumgrößen beschäftigt.

Der Raum hat eine dreifache Ausdehnung: Länge, Breite und Höhe.

Alle Gegenstände, welche diese dreifache Ausdehnung haben, sind Körper.

Die Gränzen der Körper sind Flächen, welche nur Länge und Breite, aber keine Höhe haben.

Die Gränzen der Flächen sind Linien. Diese haben nur Länge, aber keine Breite und keine Höhe.

Die Gränzen der Linien sind Punkte, welche demnach gar keine Ausdehnung haben.

Der geometrische Punkt ist ganz von denjenigen verschieden, deren man sich in den Künsten bedient, wie in der Kupferstecherei und Miniaturmalerei: denn diese können ihrer Natur nach nicht ohne Ausdehnung seyn.

Wenn ein Punkt sich gegen einen andern so hin bewegt, daß er immer in derselben Richtung bleibt, so beschreibt er eine gerade Linie.

Zwischen zwei Punkten kann nur eine einzige gerade Linie gezogen werden; die Lage einer geraden Linie ist daher vollkommen bestimmt, wenn man zwei Punkte hat, durch welche sie geht.

Es folgt hieraus, daß zwei gerade Linien sich genau einander bedecken, wenn sie zwei gemeinschaftliche Punkte haben.

Hierauf gründet sich der Gebrauch des gemeinen und des viereckigen Lineals, der mit Kreide oder mit Kohle eingeriebenen Schnüre und der Meßketten. Im Zeichnen muß bei der Beschreibung der geraden Linien dafür gesorgt werden, daß die Spitze immer in gleicher Entfernung vom Lineal bleibe, und daß die unvermeidliche Breite der Linie nicht ungleich oder zu stark werde. Das Verlängern der geraden Linien geschieht auf dem Papier durch das Fortschieben des Lineals in ihrer Richtung und auf dem Felde durch Stangen, die mit dem bloßen Auge oder durch Fernröhren in gerader Linie gestellt werden.

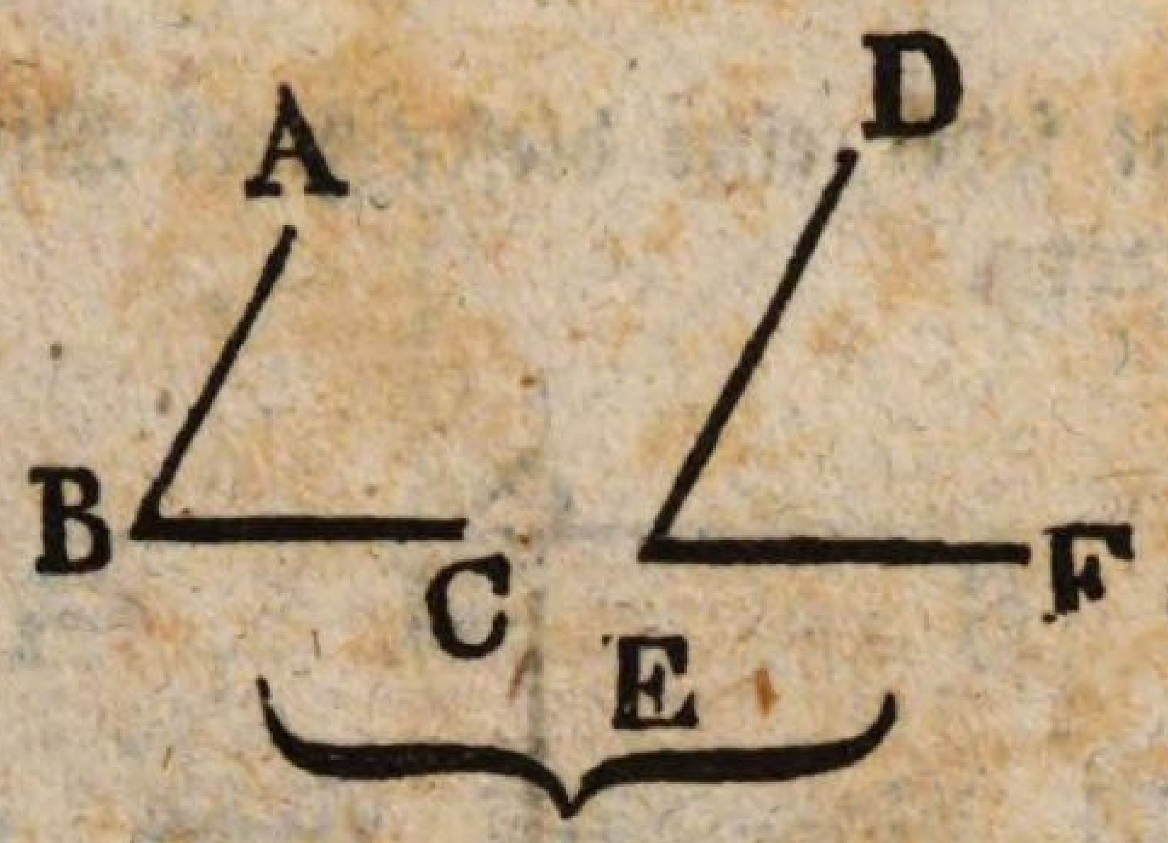
Die gerade Linie hat noch folgende Eigenschaften: 1) sie ist der kürzeste Weg zwischen ihren zwei Endpunkten. 2) Sie kann in ihrer eigenen Richtung geschoben werden, welche Eigenschaft auch der Kreis und die Schraubenlinie besitzen. 3) Wann ein Körper um sich selbst gedreht wird, bleibt immer in seinem Innern eine gerade Linie unbeweglich.

Das Wort Linie hat in den Künsten verschiedene Bedeutungen, wie bei den Seilern, Buchdruckern und in der Befestigungskunst.

Eine **Ebene** ist eine Fläche der Art, daß wenn man irgend zwei ihrer Punkte durch eine gerade Linie verbindet, diese gerade Linie ganz auf der Fläche zu liegen kommt.

Die meisten Risse werden auf Ebenen verfertigt. Bald gebraucht man hiezu Papier, Pergament, Elfenbein ꝛc., bald einen geräumigen Boden, wie in der Schiffbaukunst, bald eine Mauer, wie die Zimmerleute zu thun pflegen, bald eine Gypsfläche, wie zu den Grundrissen der Brücken im Kriegsbauwesen. Um eine Ebene zu berichtigen, legt man ein Lineal darauf und dreht es in alle Richtungen; wenn dabei das Lineal immer ganz auf der Fläche liegt, so ist dieselbe eine Ebene.

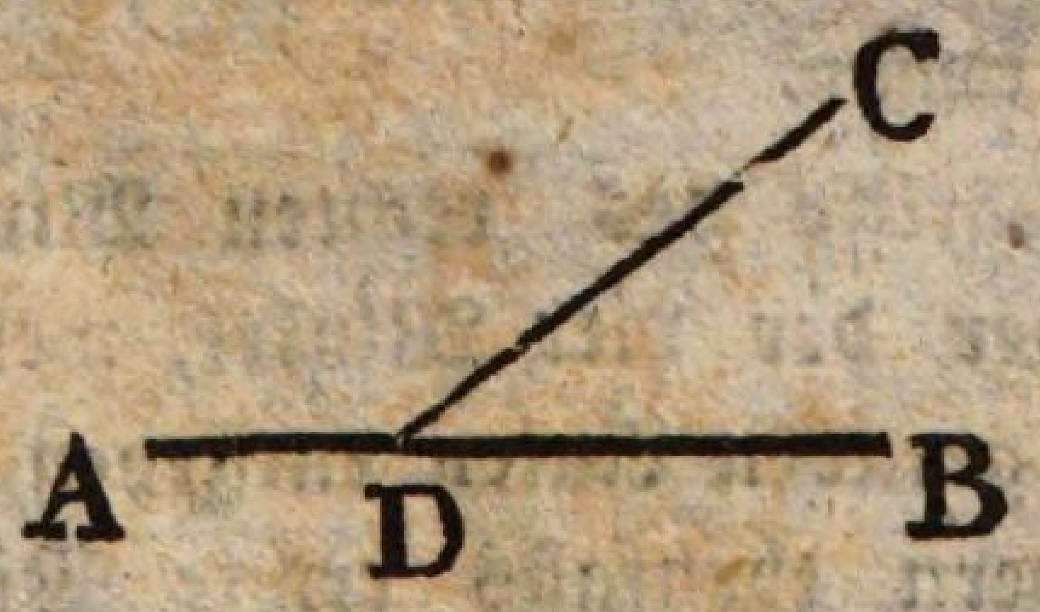
Um die Entfernung zwischen zwei Punkten zu erfahren, muß man die Länge der sie verbindenden geraden Linie ausmessen. Unsre Maaßeinheit ist der Schuh (′) zu zwölf Zollen (″), der Zoll zu acht oder zwölf Linien (‴). Diese Eintheilung nennt man die Duodezimaleintheilung, um sie von einer andern Eintheilung zu unterscheiden, bei welcher ein Schuh zehn Zolle und ein Zoll zehn Linien hat, und die Dezimaleintheilung heißt.



Wenn zwei gerade Linien AB, BC in einem Punkte B zusammentreffen, so ist die Figur, welche sie zusammen bilden, ein Winkel. Die geraden Linien AB und BC heißen die Schenkel, und ihr Durchschneidungspunkt B heißt der Scheitel des Winkels.

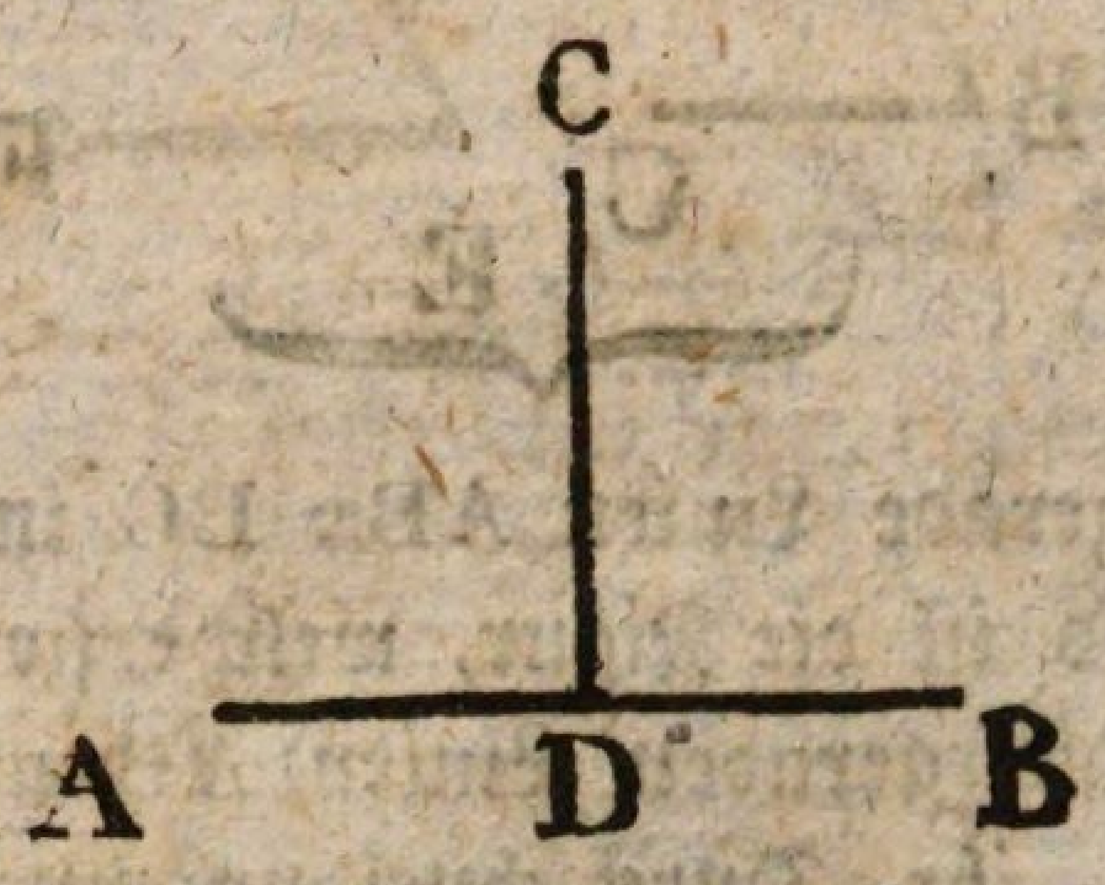
Der Winkel ABC wird größer, wenn AB sich so um den Punkt B dreht, daß dadurch die zwei Schenkel weiter aus einander stehn; er wird kleiner, wenn durch die Drehung die zwei Schenkel näher zusammenkommen. Aus dieser Erklärung geht hervor, daß die Größe der Winkel nicht von der Länge ihrer Schenkel abhängt, sondern einzig von der gegenseitigen Neigung derselben, so daß ein Winkel ganz wohl größer als ein anderer seyn kann, obschon er kürzere Schenkel hat.

Um zu erfahren, ob die 2 Winkel ABC, DEF einander gleich sind oder nicht, nehme man den letztern, lege seinen Scheitel E auf den Scheitel B des Winkels ABC und mache, daß EF die Richtung von BC nehme. Wenn alsdann auch DE die Richtung von AB nimmt, so sind die 2 Winkel einander gleich; nimmt aber DE eine andere Richtung, so ist derjenige von beiden Winkeln der größte, welcher den andern in sich einschließt.



Wenn zwei gerade Linien AB, CD in einem Punkte D so zusammentreffen, daß daraus zwei Winkel CDA, CDB

entstehen, so heißt jeder eine dieser zwei Winkel der Nebenwinkel des andern.



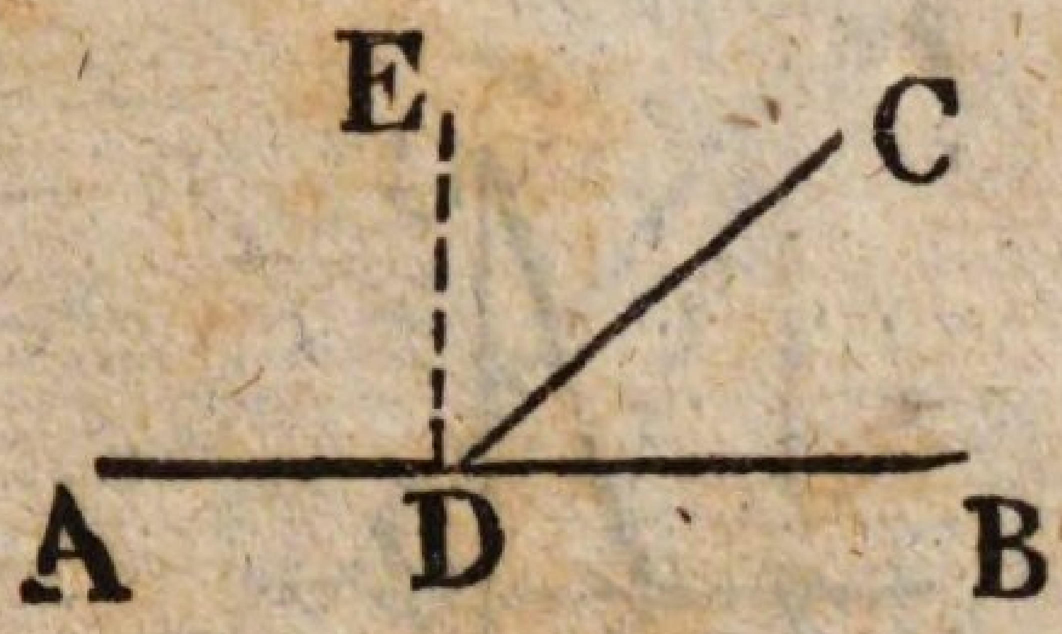
Sind zwei Nebenwinkel CDA, CDB einander gleich, so heißen sie rechte Winkel, und die Linie CD, welche die zwei rechten Winkel bildet, heißt ein Perpendikel oder eine senkrechte Linie.

Der rechte Winkel wird gewöhnlich als Einheit für das Winkelmaaß gebraucht, so daß, wenn man fragt: wie groß ein Winkel sey, darunter zu verstehen ist, wie vielmal er den rechten Winkel, oder welche Theile er von demselben enthalte. Theilt man den rechten Winkel in 90 gleiche Winkel, so heißt jeder Theil ein Grad (°), der Grad ist eingetheilt in 60 Minuten ('), die Minute in 60 Sekunden (") ꝛc.

Jeder Winkel, der größer ist als ein rechter Winkel, oder als 90°, heißt ein stumpfer Winkel, und jeder Winkel, der kleiner ist, ein spitzer Winkel.

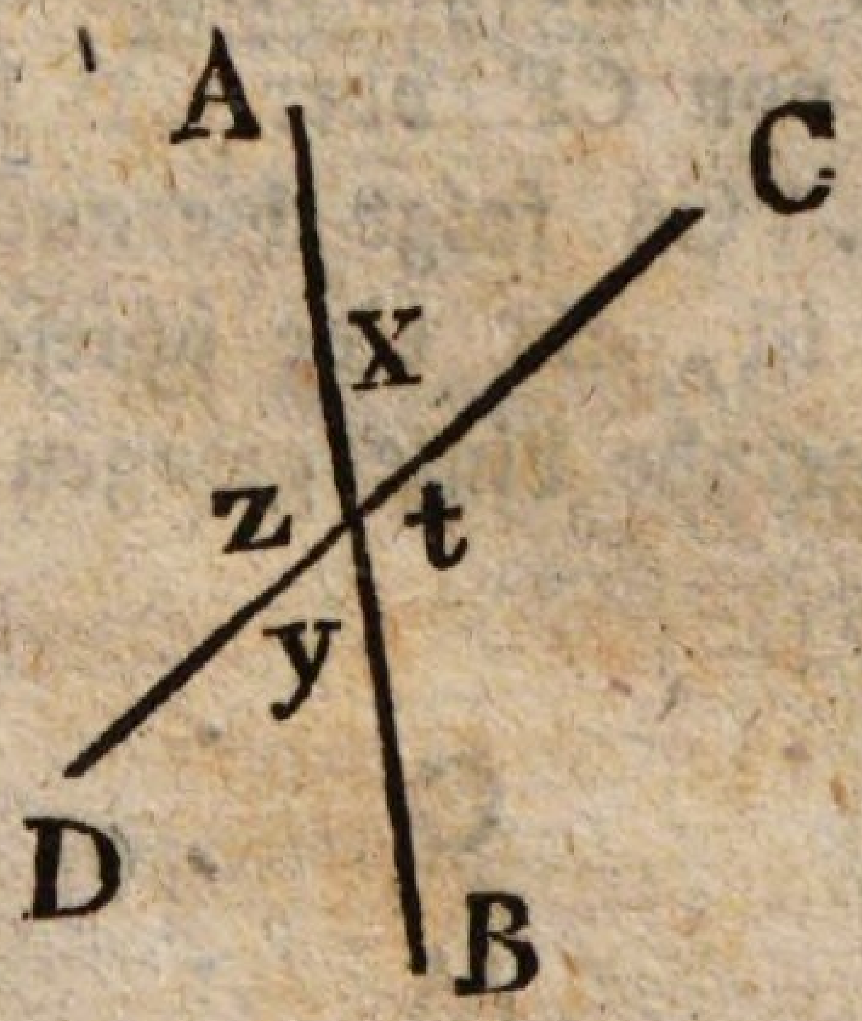
Gebrauch des Transporteurs und des Winkelmaaßes, Berichtigung derselben. Das Schrägemaaß oder die Schmiege der Schiffszimmerleute dient auch zur Uebertragung der Winkel und bestehet aus zwei stark zusammengeschraubten Linealen, die sich mit Reibung auf einander herumdrehen und jeden möglichen Winkel mit einander bilden können.

Aus dem Begriffe des rechten Winkels geht hervor: 1) daß, wenn einer der vier Winkel, welche bei der Durchschneidung zweier geraden Linien entstehen, ein rechter Winkel ist, die drei andern ebenfalls rechte Winkel seyn werden, 2) daß man über einem Punkte, der auf einer geraden Linie gegeben ist, nur eine senkrechte Linie erheben kann.

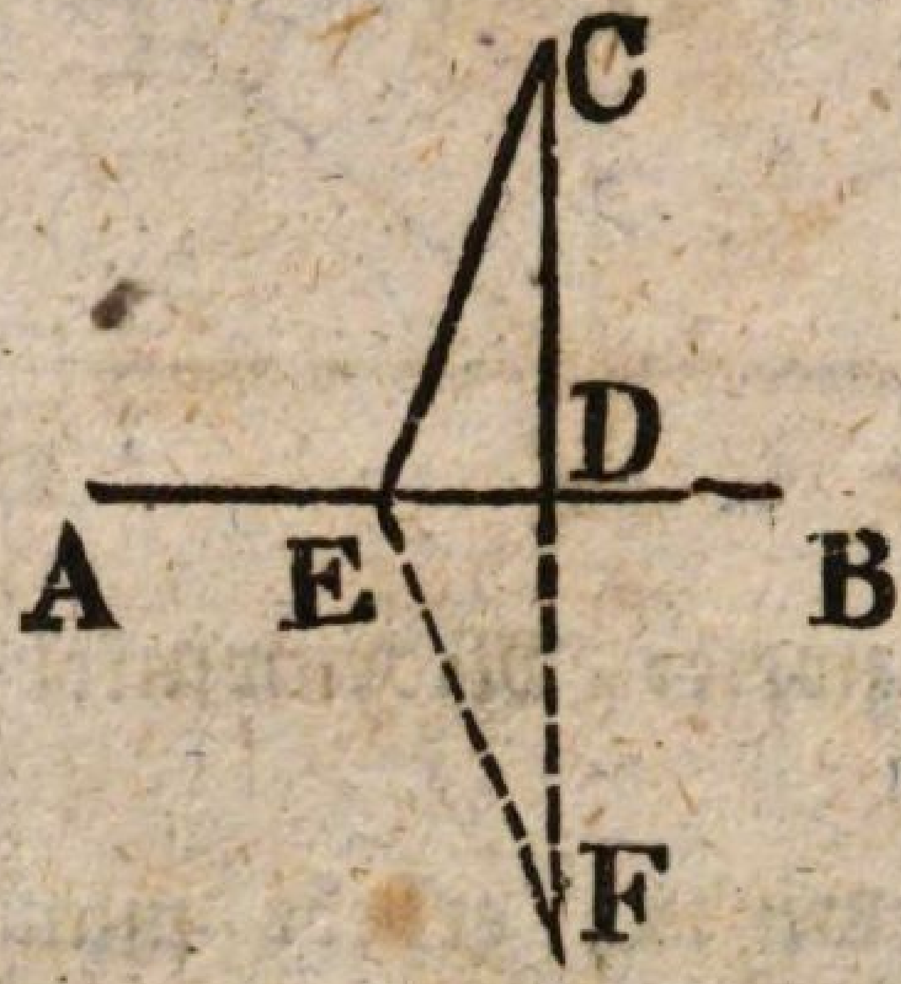


Die Summe zweier Nebenwinkel CDA, CDB ist immer 180°.

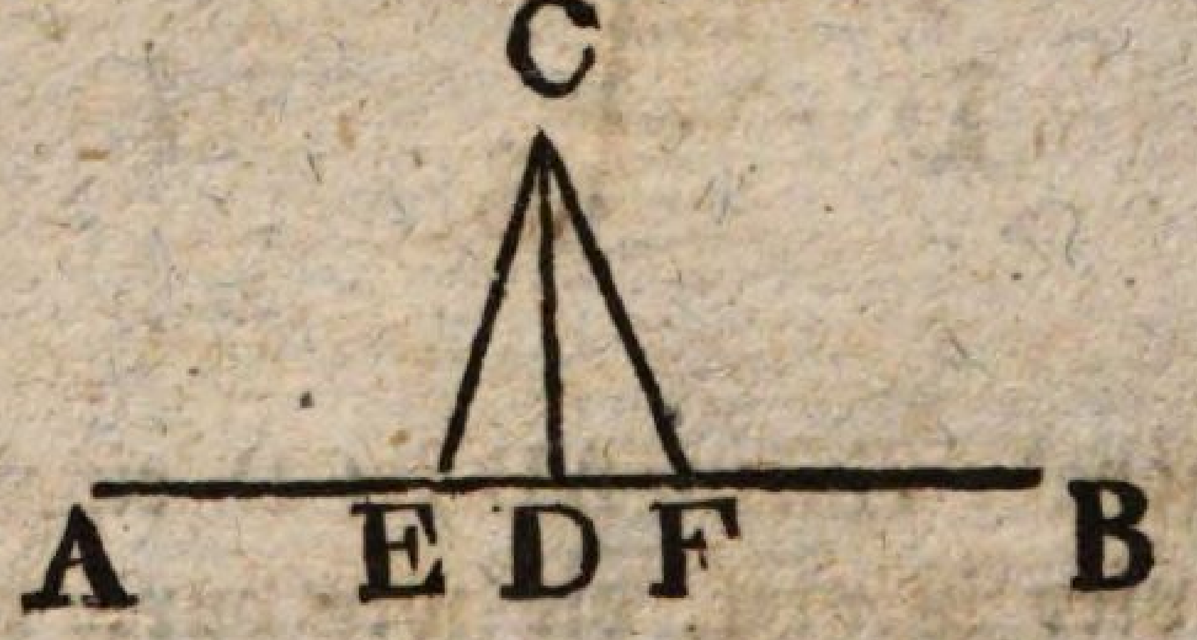
Um dies zu beweisen, erhebe man über den Punkt D eine senkrechte Linie DE, so ist der Winkel CDE dasjenige, was dem Winkel CDB an 90° fehlt; er ist aber auch das, was der Winkel CDA über 90° hat; da also einem der beiden Winkel an 90° fehlt, was der andere über 90° hat, so ist ihre Summe zweimal 90° oder 180°.



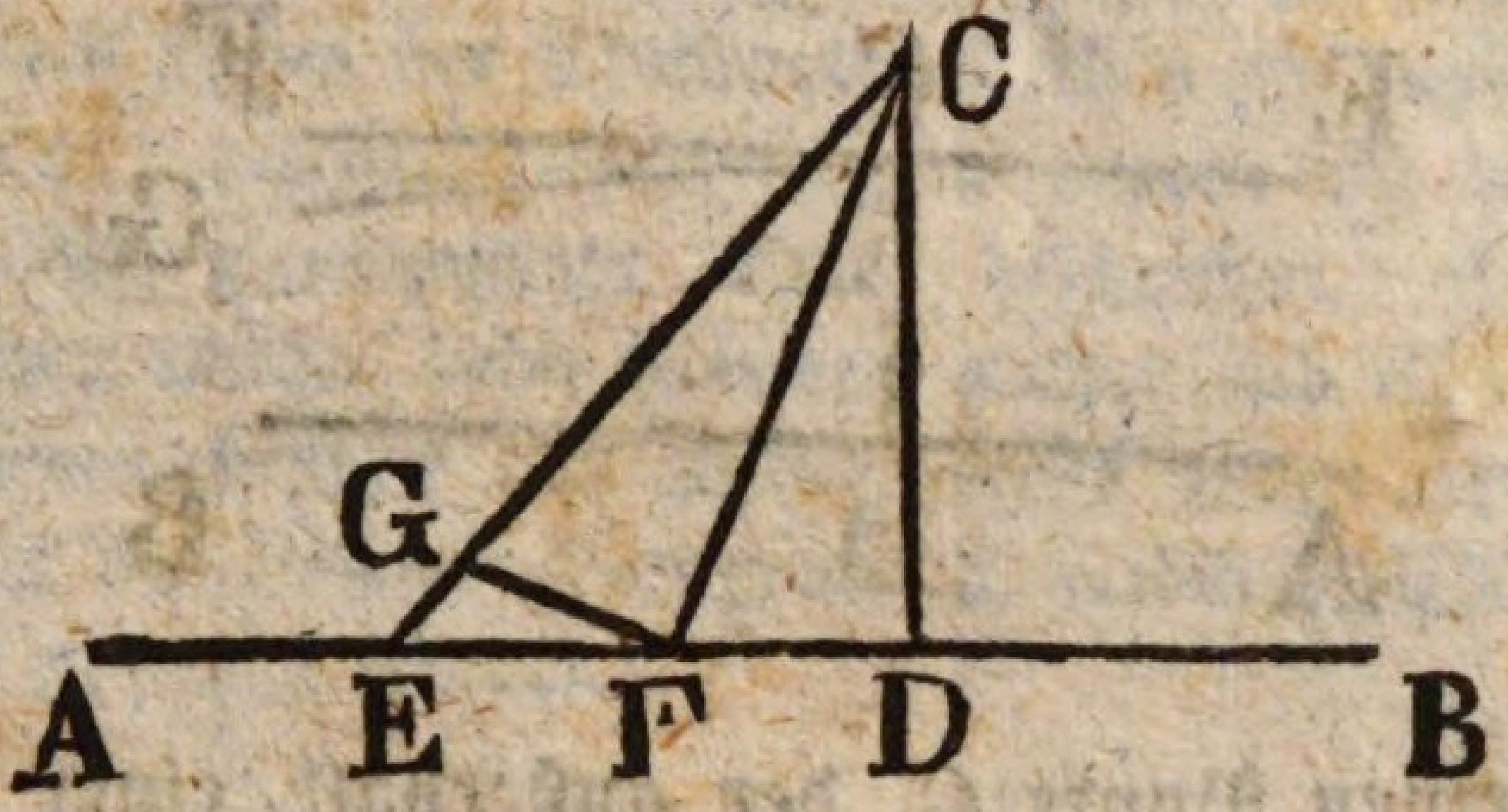
Wenn zwei gerade Linien AB, CD einander durchschneiden, so entstehen vier Winkel, die wir durch die kleinen Buchstaben x, y, z, t bezeichnen wollen. Die gegenüberliegenden Winkel x und y, so wie die Winkel z und t, nennt man Scheitelwinkel. Solche Scheitelwinkel sind immer einander gleich. Um dies z. B. von den Winkeln x und y zu beweisen, bemerke man, daß jeder von beiden z zum Nebenwinkel hat, daher jedem von beiden z an 180° fehlt, und da jedem dasselbe an 180° fehlt, so sind sie nothwendig einander gleich.



Wenn CD auf AB senkrecht, CE aber schief steht, und man drehet beide gemeinschaftlich um AB, so wird CD auf ihre Verlängerung in DF und CE in EF fallen. CF wird alsdann natürlich doppelt so groß als CD, und die gebrochene Linie CEF doppelt so groß als CE seyn; nun ist aber CF als gerade Linie kleiner als die gebrochene CEF; folglich ist auch die Hälfte von CF oder CD kleiner als die Hälfte von CFE oder CE. Es folgt hieraus, daß eine senkrechte Linie immer kleiner ist, als eine schiefe, die von demselben Punkt auf dieselbe gerade Linie gezogen wird.



Wenn CD auf AB senkrecht steht, CE und CF aber zwei schiefe Linien sind, deren Abstände DE und DF von der Senkrechten einander gleichen, so sind diese schiefen Linien selbst einander gleich; denn dreht man den ganzen Theil der Figur, welcher links von CD liegt, um CD, so wird sich ED auf DF und folglich auch CE auf CF legen. Vermittelst dieser Eigenschaft kann man leicht erfahren, ob eine gerade Linie auf einer andern vollkommen senkrecht steht.



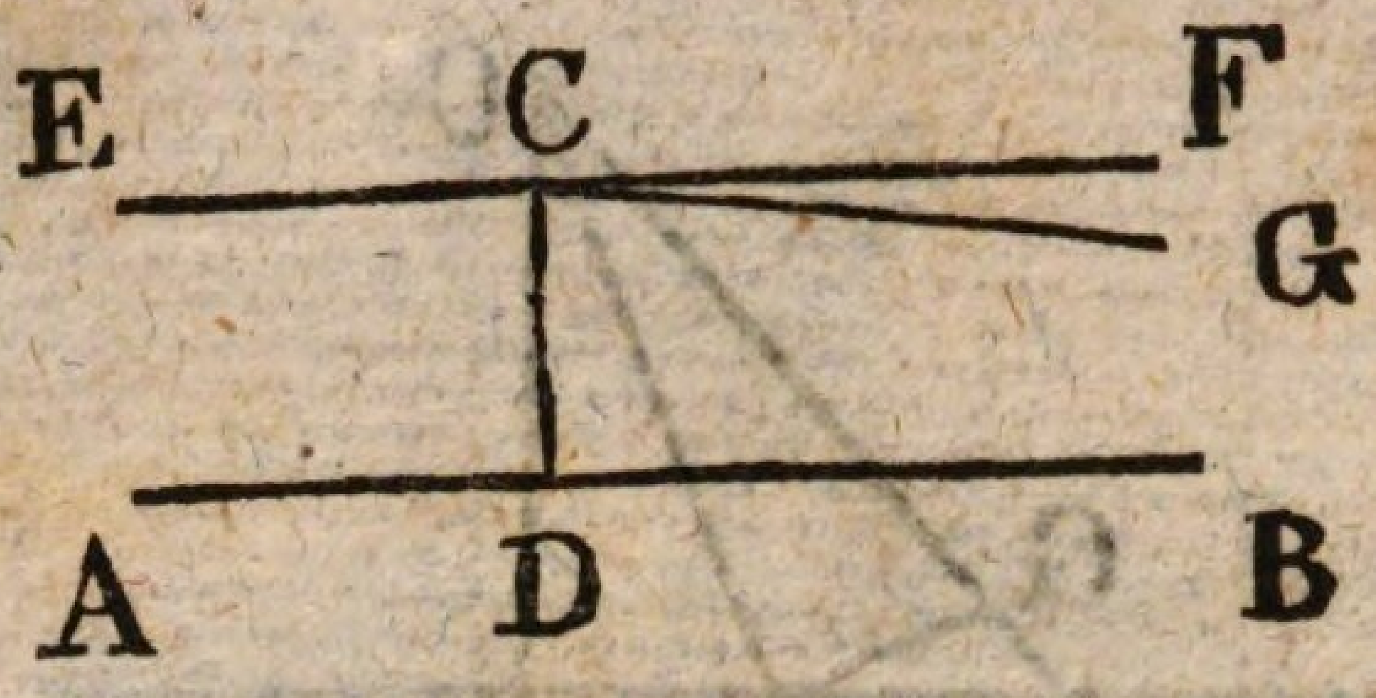
Von zwei schiefen Linien CE und CF, die sich auf derselben Seite einer senkrechten CD befinden, ist diejenige am kleinsten, welche der senkrechten am nächsten liegt. Um zu beweisen, daß CF kleiner ist als CE, ziehe man FG senkrecht auf CF, so wird CF schon kleiner als CG und um so sicherer kleiner als CE seyn.

Es geht hieraus hervor, daß man von einem Punkte aus, der außerhalb einer geraden Linie liegt, keine drei gleiche schiefen Linien auf die gerade Linie ziehen kann.

Zweiter Abschnitt.

Von den Parallellinien und ihren Verbindungen mit den senkrechten und schiefen Linien.

Zwei gerade Linien sind parallel oder gleichlaufend, wenn man wider beide eine Ebene legen kann und sie nie zusammentreffen, wie weit man sie auch auf beiden Seiten verlängern mag.



Durch einen Punkt C, der außerhalb einer geraden Linie AB gegeben ist, kann man immer eine gleichlaufende Linie ziehn, aber nie mehr als eine.

Um durch den Punkt C eine Parallellinie zu ziehn, lasse man von diesem Punkte aus auf AB eine senkrechte CD fallen, dann ziehe man EF senkrecht auf CD und man hat in EF die verlangte Parallellinie; denn wenn EF mit AB in irgend einem Punkte zusammenträfe, so gingen durch diesen Punkt zwei gerade Linien, die beide auf CD senkrecht stehn, welches, wie wir im vorigen Abschnitte gesehen haben, nicht möglich ist.

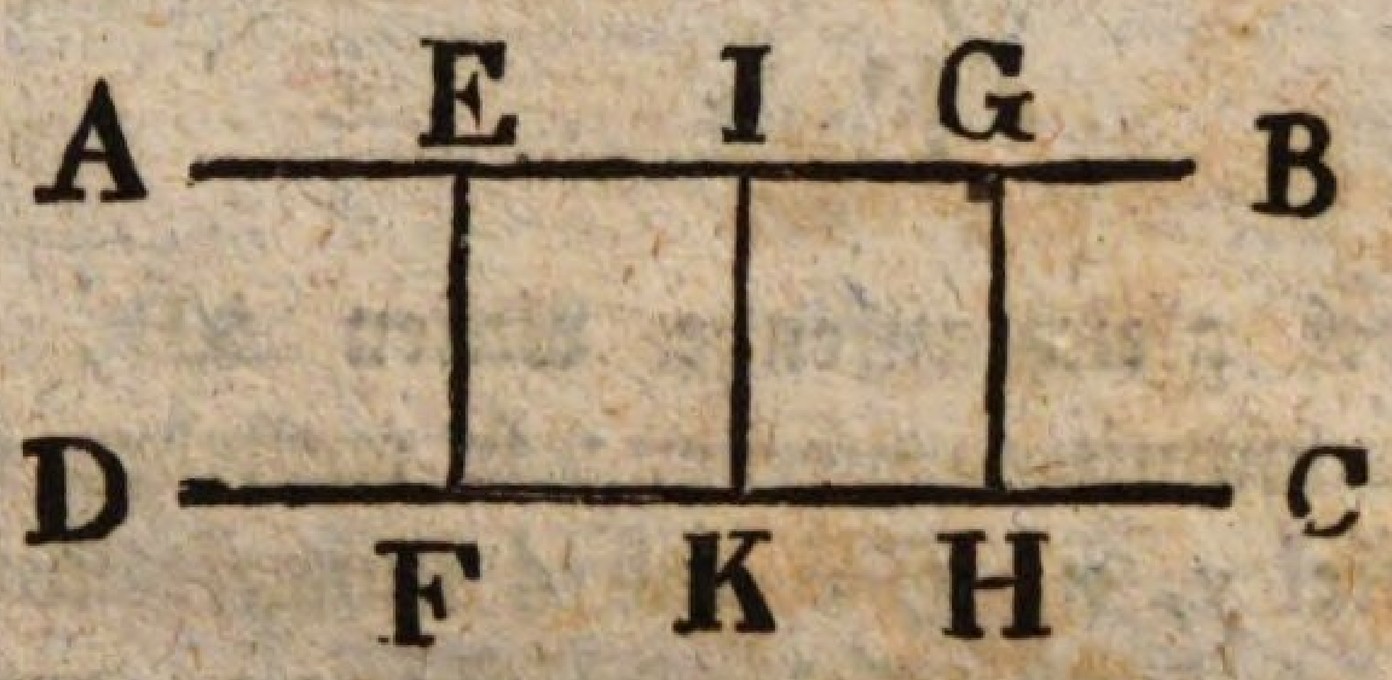
Jede andere gerade Linie CG, die durch den Punkt C geht und auf CD nicht senkrecht steht, ist nicht parallel mit AB und wird bei gehöriger Verlängerung mit dieser Linie zusammentreffen. Diese Wahrheit erkennt man durch die bloße Anschauung der Figur und bedarf keines weitern Beweises. Allgemein ausgesprochen lautet sie so: **Wenn zwei gerade Linien von einer dritten so durchschnitten werden, daß die eine auf der dritten senkrecht steht, die andere aber mit ihr einen schiefen Winkel bildet, so sind diese zwei geraden Linien nicht parallel.** Es folgt hieraus:

1) daß man durch einen außerhalb einer geraden Linie gegebenen Punkt derselben keine zwei Parallellinien ziehen kann.

2) daß, wenn zwei gerade Linien parallel sind, und eine dritte steht senkrecht auf der einen, sie auch auf der andern senkrecht stehen muß.

Auf diese Eigenschaft gründet sich der Gebrauch der Reißschiene bei den Tischlern, welche unter andern auch dazu dient, durch beliebige

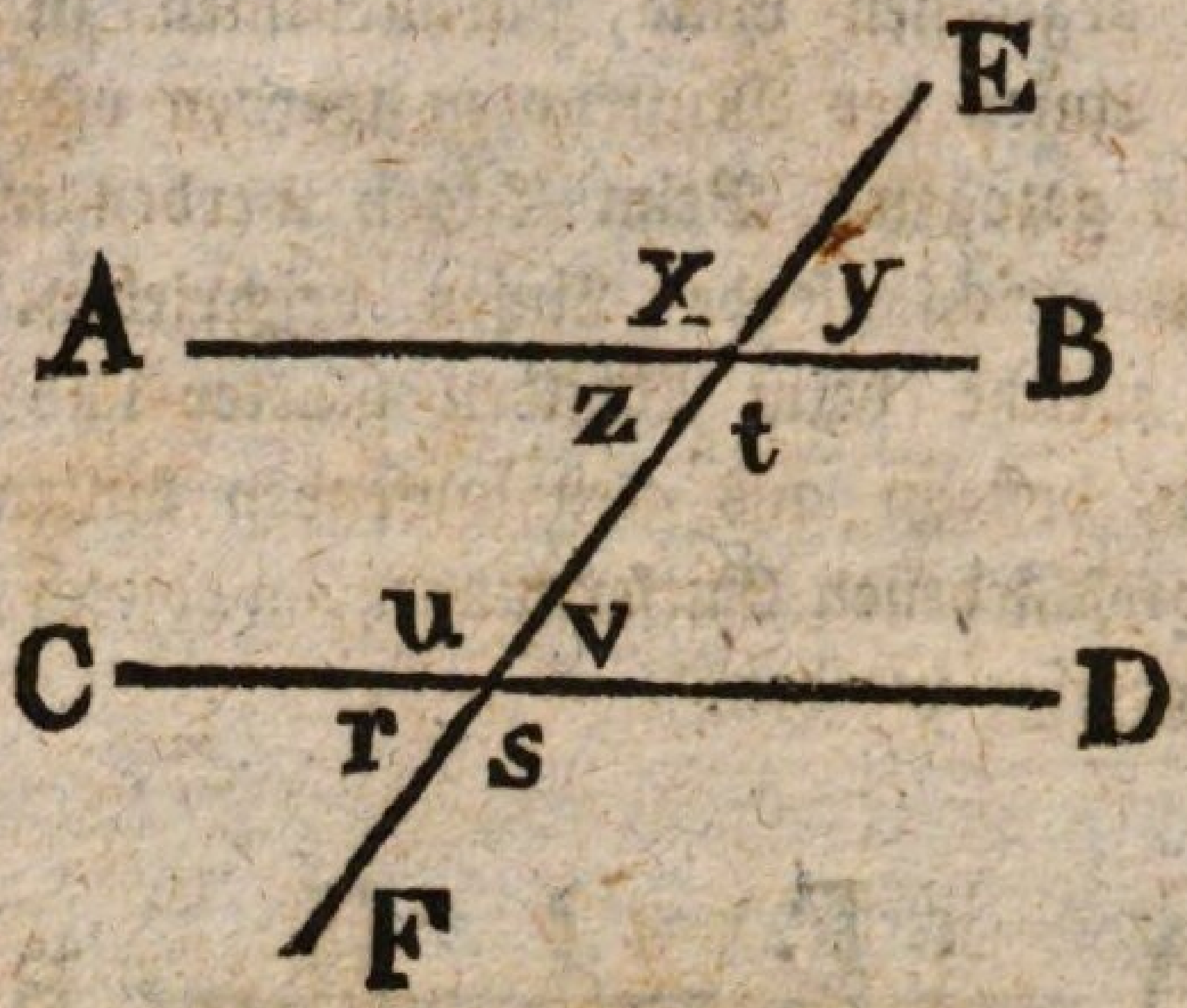
Punkte einer gegebenen Linie Parallellinien zu ziehen. Die fünf gleichlaufenden Linien der Musiknoten werden oft zugleich vermittelst des Rostrals gezogen. Beim Eggen werden mit den Spitzen der Egge ebenfalls gleichlaufende Linien beschrieben. Auch die Kreuzschattirungen, welche beim Abbilden glatter und ebener Flächen gebraucht werden, bestehn aus gleichlaufenden Linien von verschiedener Stärke oder verschiedenen Entfernungen, wodurch die Abstufungen der Dunkelheit angezeigt werden.



Zwei Parallellinien AB, DC sind in ihrer ganzen Länge gleichweit von einander entfernt, so daß, wenn man aus zwei beliebigen Punkten E, G der Linie AB die senkrechten EF, GH auf die andere zieht, diese zwei senkrechten Linien gleiche Länge haben. Um dies zu beweisen, nehme ich den Punkt I in der Mitte von EG und ziehe auf beide Parallellinien die senkrechte IK. Ich drehe dann den ganzen linken Theil der Figur um IK, bis er sich auf den rechten Theil legt, wobei die senkrechten EF und GH einander bedecken werden und folglich gleich sind.

Eine äußerst nützliche Anwendung dieses Satzes bieten die Eisenbahnen dar. Es sind Geleise, welche auf Landstraßen angebracht werden, und auf welchen sich die Räder eines Wagens mit großer Leichtigkeit fortbewegen. Da die Entfernung der Räder von einander unveränderlich ist, so müssen auch die Geleise überall gleichweit von einander entfernt und folglich parallel seyn.

Die Mull-jenny, oder Wagen, die zum Baumwollspinnen dienen, enthalten auch eine Anwendung des obigen Satzes. Es gehen dabei viele Fäden von einer geraden Linie aus und wickeln sich gleichzeitig um Spulen, die an einer andern geraden Linie angebracht sind, die sich gegen die erste hinbewegt. Damit nun die Fäden immer alle gleiche Länge behalten, ist es nöthig, daß jene 2 geraden Linien immer parallel bleiben.



Wenn zwei gleichlaufende Linien AB, CD von einer dritten EF durchschnitten werden; so entstehen im Allgemeinen 4 spitzige Winkel y, z, v, r und 4 stumpfe Winkel x, t, u, s, und man hat sich hierbei folgende Sätze zu merken:

1) Die Winkel y und v sind einander gleich; denn wenn man die Linie AB gegen CD fortschiebt, so daß sie immer parallel bleibt, und dabei die Linie EF sich in ihrer eigenen Richtung fortbewegt, so müssen endlich die Winkel y und v einander bedecken. Dasselbe findet Statt von den Winkelpaaren t und s, x und u, z und r. Man nennt diese Winkelpaare Wechselwinkel von außen und innen.

2) Die Summe der zwei innern Winkel t und v ist 180° denn t und y sind 180° zusammen als Nebenwinkel und da y = v, so sind t und v zusammen so viel als t und y zusammen. Dasselbe gilt von den Winkeln z und u.

3) Die Winkel z und v sind einander gleich, denn jedem von beiden fehlt der Winkel t an 180°. Dasselbe gilt von den Winkeln t und u. Man nennt diese Winkelpaare Wechselwinkel von innen.

4) Die Winkel y und r sind einander gleich, weil ihre Scheitelwinkel z und v einander gleichen. Dasselbe gilt von den Winkeln x und s. Man nennt diese Winkelpaare Wechselwinkel von außen.

Umgekehrt kann man schließen, daß zwei gerade Linien AB, CD, die von einer dritten EF durchschnitten werden, parallel sind, wenn entweder die Summe der innern Winkel

auf derselben Seite 180° ist, oder wenn die Wechselwinkel von innen, oder die Wechselwinkel von außen, oder die Wechselwinkel von innen und außen einander gleichen.

Auf diese Eigenschaft der Parallellinien gründet sich die in vielen Künsten angewendete Methode, vermittelst zweier hölzernen, rechtwinkligen Dreiecke durch gegebene Punkte Parallellinien zu ziehen. Ueberhaupt alle Vorrichtungen bei welchen ein Körper sich in einem andern, der ihn umschließt, ungehindert bewegt, wie die Schubladen, die Stämpel der Pumpen 2c. sind Anwendungen der bisher erwiesenen Eigenschaften der Parallellinien. Auch gehört hierher der Gebrauch des Kammes, durch welchen die zu einem Zeuge angezettelten Fäden parallel gehalten werden.

Um eine Figur zu machen, die einer gegebenen vollkommen gleiche, und auf derselben Ebene liege, zieht man aus den Hauptpunkten der gegebenen, nach derselben Richtung hin, Parallellinien von gleicher Länge und verbindet die Endpunkte dieser Parallellinien, nach Beschaffenheit der Figur, durch gerade Linien, oder durch Züge mit freier Hand, wodurch die verlangte Figur gebildet wird. Diese Methode findet ihre Anwendung in der Baukunst und überhaupt, wo ein Körper so bereitet werden soll, daß er sich in einen hohlen Körper von bestimmter Gestalt genau hineinfüge.

Eine der nützlichsten Anwendungen, welche von den Eigenschaften der Parallellinien gemacht werden, ist die Projections= oder Entwerfungsmethode, welche zum Zweck hat, durch auf Ebenen gezeichnete Figuren alle Theile der Oberfläche eines Gegenstandes, ihre gegenseitigen Neigungen, so wie die wahre Lage des Gegenstandes im Raum zu kennen zu geben. Man bedient sich zu diesem Zwecke zweier, auf einander senkrecht stehenden Ebenen, von welchen die eine eine horizontale (wasserrechte) und die andere eine verticale (lothrechte) Richtung hat. Läßt man nun von allen Punkten des Gegenstandes gleichlaufende Linien fallen, so erhält man zwei Bilder, welche man die Projectionen des Gegenstandes nennt. Die horizontale Projection nennt man auch den Grundriß und die verticale den Aufriß, und durch beide zusammengenommen sind alle Theile des Gegenstandes vollkommen bestimmt.

Dieser Entwerfungsmethode bedient man sich übrigens nicht blos, um die Gegenstände selbst, sondern auch, um die geraden oder krummen Linien darzustellen, die sie bei ihren bestimmungsmäßigen Bewegungen durchlaufen. — In der Kriegsbaukunst die von den Kugeln zu beschreibenden krummen Linien, in der Sternkunde die Bahnen der Himmelskörper. Die Anwendung der Projections=

methode ist hiebei jedes Mal unentbehrlich, wenn die beschriebenen krummen Linien nicht ganz in einer Ebene liegen und dadurch nicht auf einer Ebene gezeichnet werden können, wie z. B. die Schlangen- und Schraubenlinien. Im Maschinenwesen, besonders beim Räderwerk kommen oft solche Bewegungen vor.

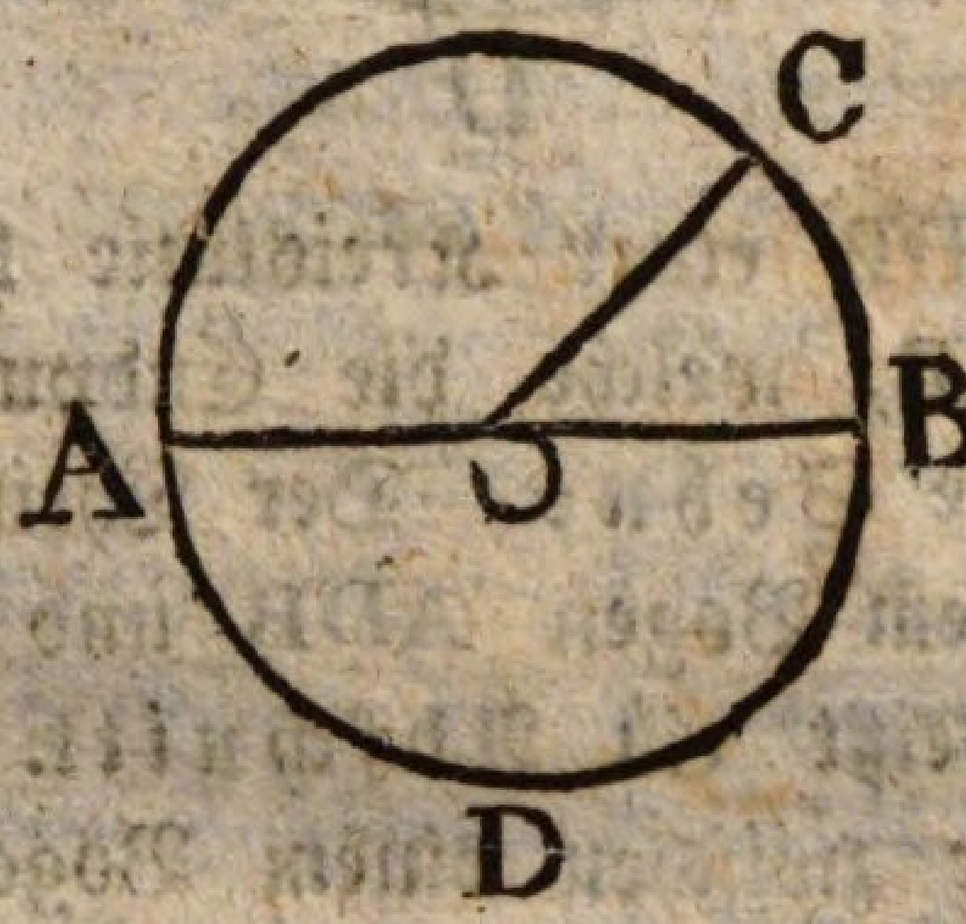
Beim Schiffbau ist von höchster Wichtigkeit, daß der Kiel, oder der Theil, welcher vom Wasser umschlossen wird, ganz nach den vom Baumeister bestimmten Ausdehnungen ausgearbeitet werde, und die rechte Seite das Steuerbord muß der linken Seite dem Backbord, vollkommen gleich gemacht werden. Zu diesem Ende werden in dem Risse die verschiedenen Wasserlinien des Schiffes angegeben, d. h. die verschiedenen krummen Linien, welche die Oberfläche des Wassers bei den verschiedenen Senkungen des Schiffes bildet, indem es dasselbe umschließt, welche Wasserlinien dann vermittelst der Projectionsmethode nachgebildet werden.

Um mit hinreichender Genauigkeit die Gestalt zu bestimmen, welche der Boden eines Sees, eines Flusses ꝛc. hat, bildet man auf der Zeichnung der Oberfläche ein Netz durch zwei Reihen gleichlaufender, auf einander senkrecht stehender Linien und sucht nachher, die Tiefen zu bestimmen, welche den Durchschnittspunkten entsprechen. Ein ähnliches Verfahren beobachtet man bei der Anlegung der Kanäle, wo dem Boden durch Ausfüllung und Wegräumung die tauglichste Gestalt gegeben werden muß. Oft bestimmt man auch die Gestalt des Bodens durch eine Reihe krummer Linien, welche den Rand des Wassers bei verschiedenen Höhen vorstellen.

Es wäre überflüssig hier noch mehreres zur Empfehlung der Projectionsmethode hinzuzufügen. Jeder denkende junge Künstler wird jetzt schon ihren vielfachen Nutzen einsehen und sich durch Nachdenken und fleißige Uebung mit derselben vertraut zu machen suchen.

Dritter Abschnitt.

Vom Kreis.



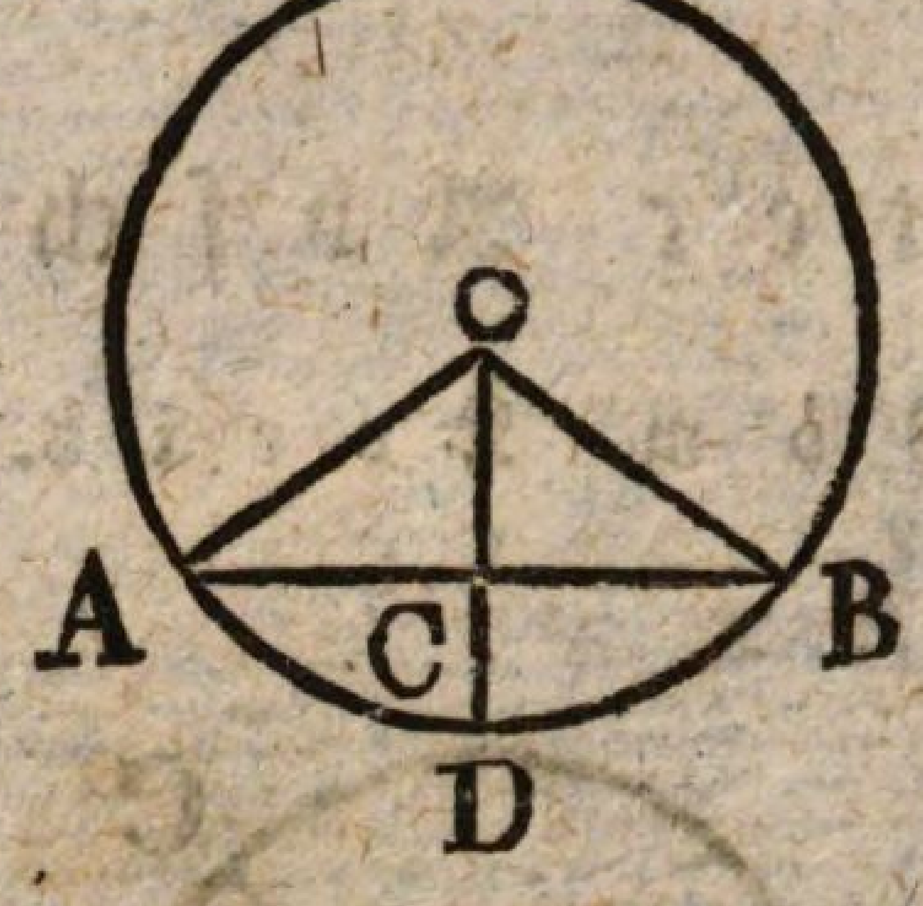
Eine Kreislinie oder Kreisperipherie ist eine krumme Linie ACBD, deren Punkte alle gleich weit von einem innern Punkte O entfernt sind, den man das Centrum oder den Mittelpunkt nennt. Die von der Kreislinie eingeschlossene Ebene heißt eine Kreisfläche.

Jede gerade Linie OC, welche einen Punkt der Kreislinie mit dem Mittelpunkte verbindet, heißt ein Radius oder Halbmesser.

Jede gerade Linie AOB, welche durch den Mittelpunkt geht, und deren beide Endpunkte auf der Peripherie liegen, heißt ein Diameter oder Durchmesser.

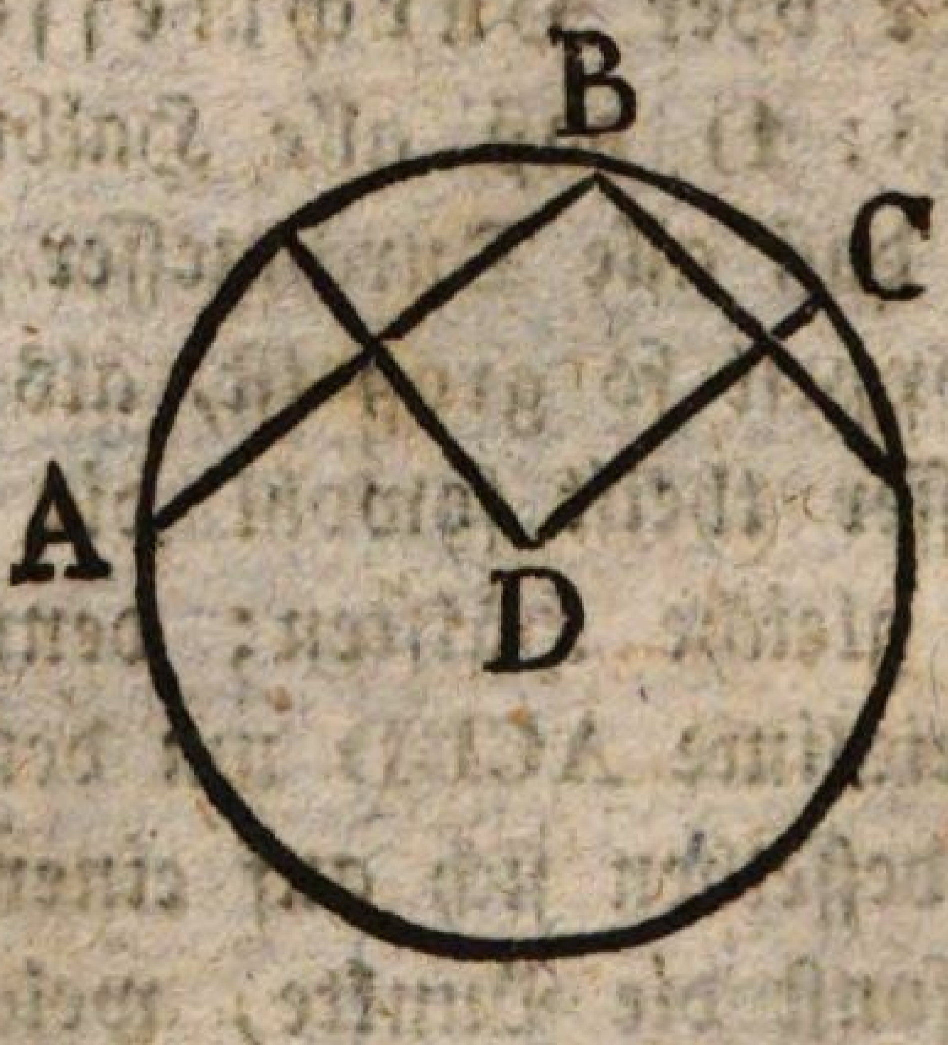
Es folgt hieraus: 1) daß alle Halbmesser einer Kreislinie gleich sind; 2) daß alle Durchmesser gleich sind; 3) daß jeder Durchmesser doppelt so groß ist, als ein Radius.

Jeder Durchmesser theilt sowohl die Kreislinie als die Kreisfläche in zwei gleiche Hälften; denn, dreht man den obern Theil der Kreislinie ACBD um den Durchmesser AB, so muß jeder Theil desselben sich auf einen Punkt des untern Theils legen, weil sonst die Punkte, welche außerhalb oder innerhalb des Theiles ADB fielen, nicht dieselbe Entfernung vom Mittelpunkte hätten, als die verschiedenen Punkte jenes Theiles.



Jeder Theil ADB einer Kreislinie heißt ein Bogen. Die gerade Linie AB, welche die Endpunkte eines Bogens verbindet, heißt eine Sehne. Der Theil einer Kreisfläche, welcher zwischen einem Bogen ADB und seiner Sehne AB eingeschlossen ist, heißt ein Abschnitt. Der Theil der Kreisfläche, welcher zwischen einem Bogen ADB und den Halbmessern AO, BO enthalten ist, die durch seine Endpunkte gehen, heißt ein Ausschnitt.

Wenn man vom Mittelpunkte O auf die Sehne AB eine senkrechte OC zieht, so wird dadurch sowohl die Sehne selbst, als der von ihr gespannte Bogen ADB in zwei gleiche Theile zerlegt; denn, dreht man den Ausschnitt AOD um AD, so wird AC die Richtung von CB nehmen, und da der Punkt A nothwendig innerhalb der Kreislinie bleiben muß, so kann er nirgend wo hinfallen, als in den Punkt B; es ist also AC so groß als CB, und da auch die Bogen AD und DB einander bedecken, so sind sie ebenfalls einander gleich.



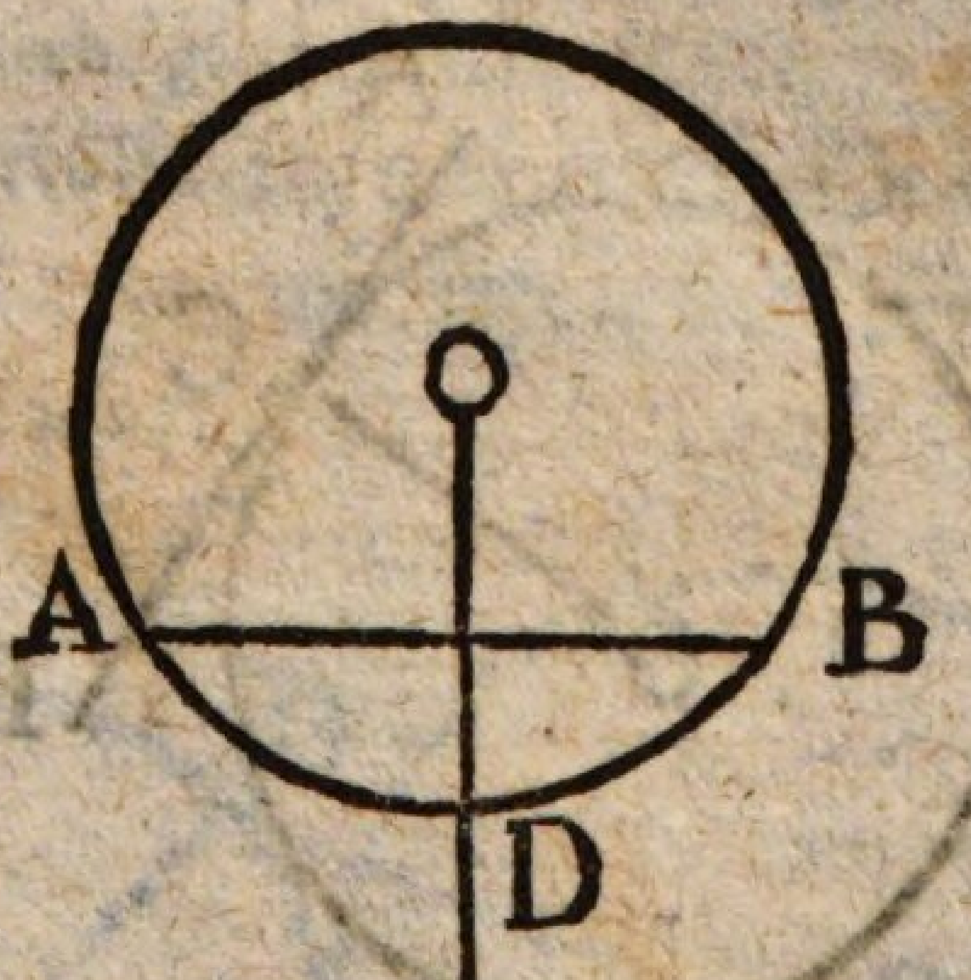
Da über einem einzigen Punkte einer geraden Linie keine zwei senkrechten Linien erhoben werden können, so kann man

auch umgekehrt versichert seyn, daß jede senkrechte Linie, die über der Mitte einer Sehne erhoben wird, durch den Mittelpunkt geht. Man hat dadurch ein Mittel, durch drei Punkte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, eine Kreislinie zu beschreiben. Man betrachte nämlich die geraden Linien AB, BC, welche diese Punkte verbinden, als Sehnen, und erhebe über ihre Mitten zwei Senkrechten, deren Durchschnittpunkt D der Mittelpunkt der verlangten Kreislinie seyn muß, weil derselbe nothwendig auf beiden Senkrechten zugleich liegt.

Wenn man den Mittelpunkt einer gegebenen Kreislinie zu finden wünscht, so ziehe man zwei beliebige Sehnen und erhebe über jede derselben eine senkrechte Linie, so wird der Durchschnittspunkt derselben der verlangte Mittelpunkt seyn.

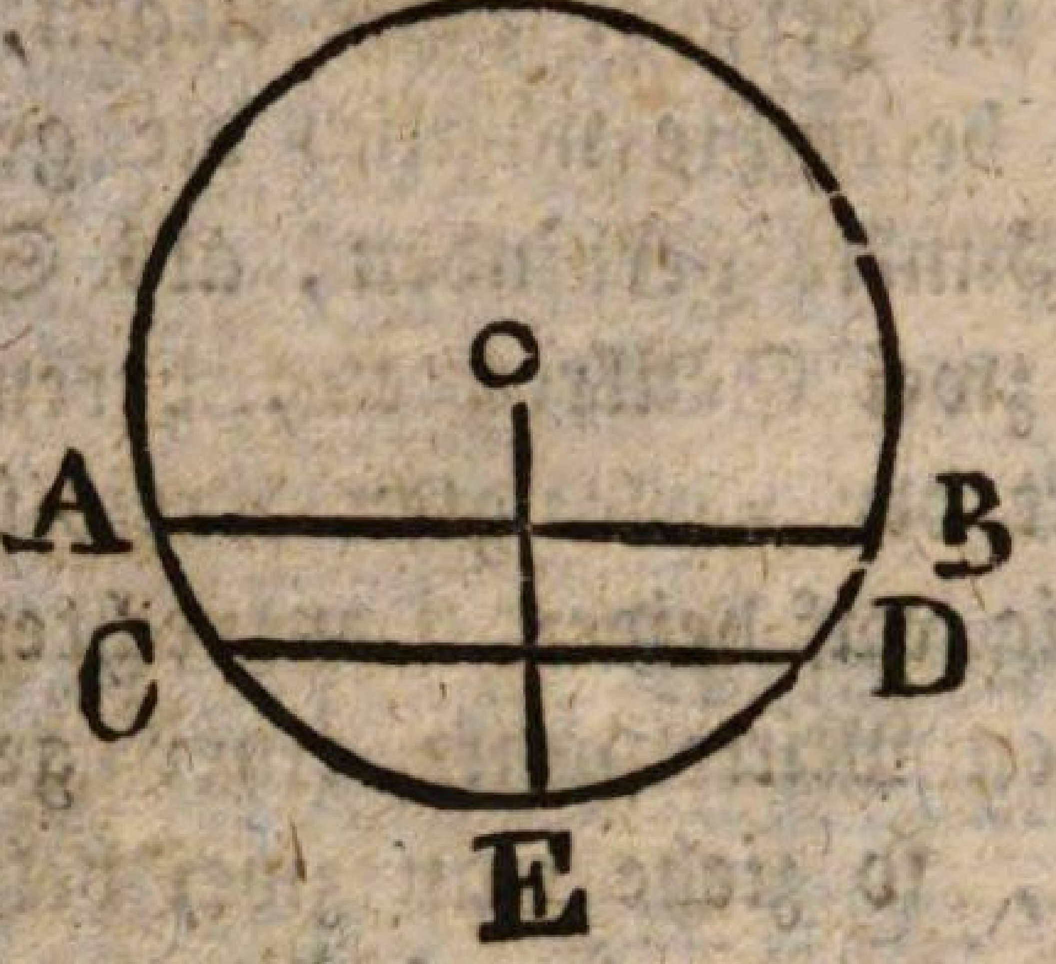
Jeder Punkt, der gleichweit entfernt von den Endpunken einer geraden Linie ist, liegt auf der Senkrechten, welche durch deren Mitte geht; indem man ihn als den Mittelpunkt einer Kreislinie betrachten kann, die durch die Endpunkte der gegebenen geraden Linie gezogen wird.

Dieser Satz gibt ein Mittel, einen gegebenen Bogen AB zu halbiren

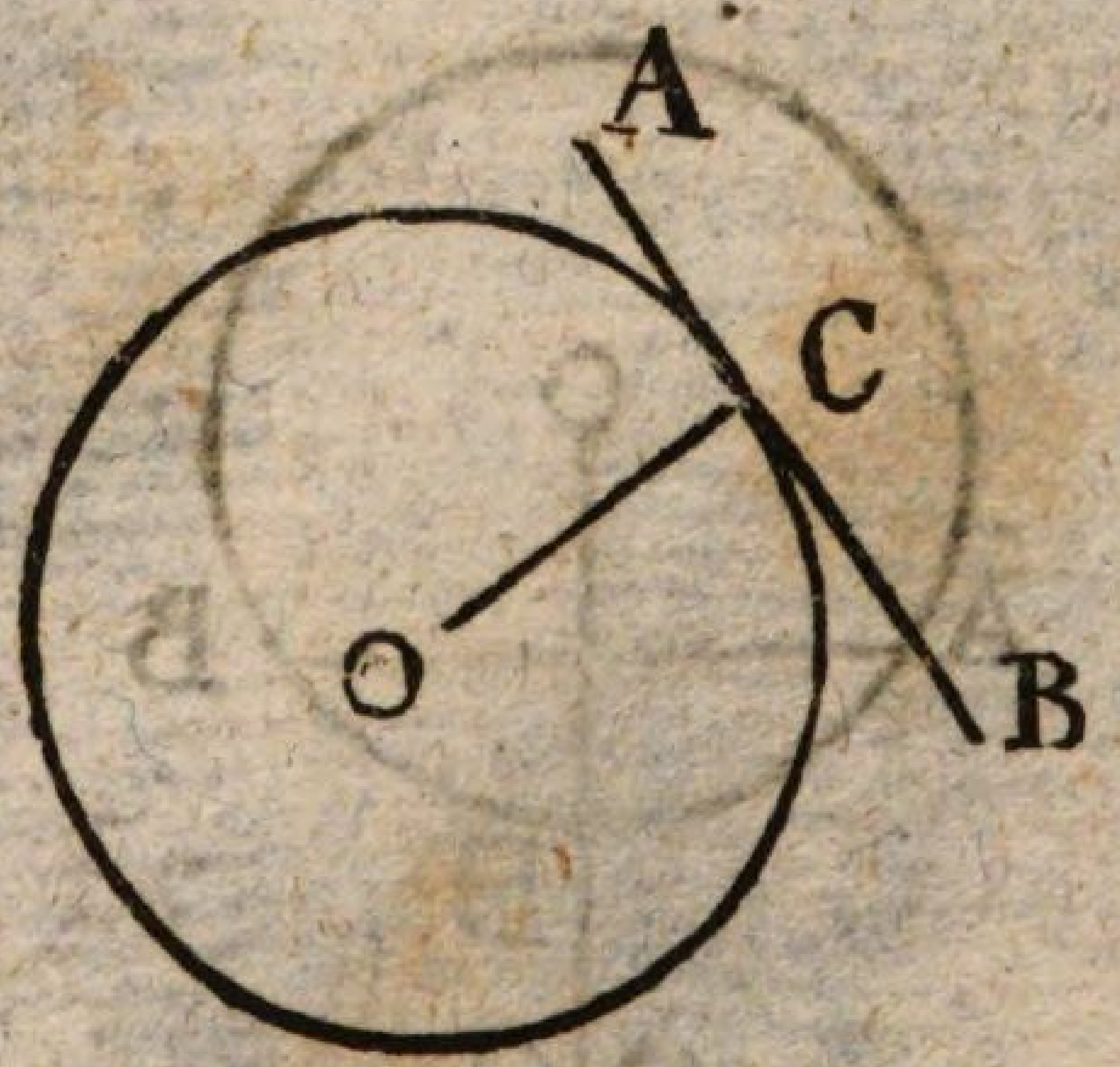


Man beschreibe nemlich aus den Endpunkten des gegebenen Bogens mit einerlei Zirkelöffnung zwei andere Bogen, die sich in einem Punkte C durchschneiden und ziehe OC, so wird der Punkt D, wo diese Linie den Bogen AB durchschneidet, die verlangte Mitte desselben seyn; denn, da die

zwei Punkte O und C gleich weit von A und von B entfernt sind, so muß die senkrechte Linie, welche die Sehne AB und ihren Bogen halbirt, durch diese zwei Punkte gehen.



Wenn zwei Sehnen AB, CD gleichlaufend sind, so sind die zwischen ihnen enthaltenen Bogen AC, BD einander gleich; denn, läßt man vom Mittelpunkt O auf beide Sehnen eine Senkrechte OE fallen, so wird sowohl der Bogen AEB als der Bogen CED im Punkte E halbirt; mithin muß der Bogen AC, als der Unterschied zwischen den zwei Hälften AE und CE, dem Bogen BD, als dem Unterschiede zwischen den zwei Hälften BE und DE gleichen.



Eine gerade Linie AB, die durch den Endpunkt C eines Halbmessers OC geht, und auf demselben senkrecht steht, hat, außer dem Punkte C, keinen andern Punkt mit der Kreislinie gemeinschaftlich; denn die geraden Linien, welche die übrigen Punkte der Linie AB mit dem Mittelpunkte O verbinden, sind als schiefe Linien größer als die Senkrechte OC, d. h. größer als der Halbmesser des Kreises. Eine solche

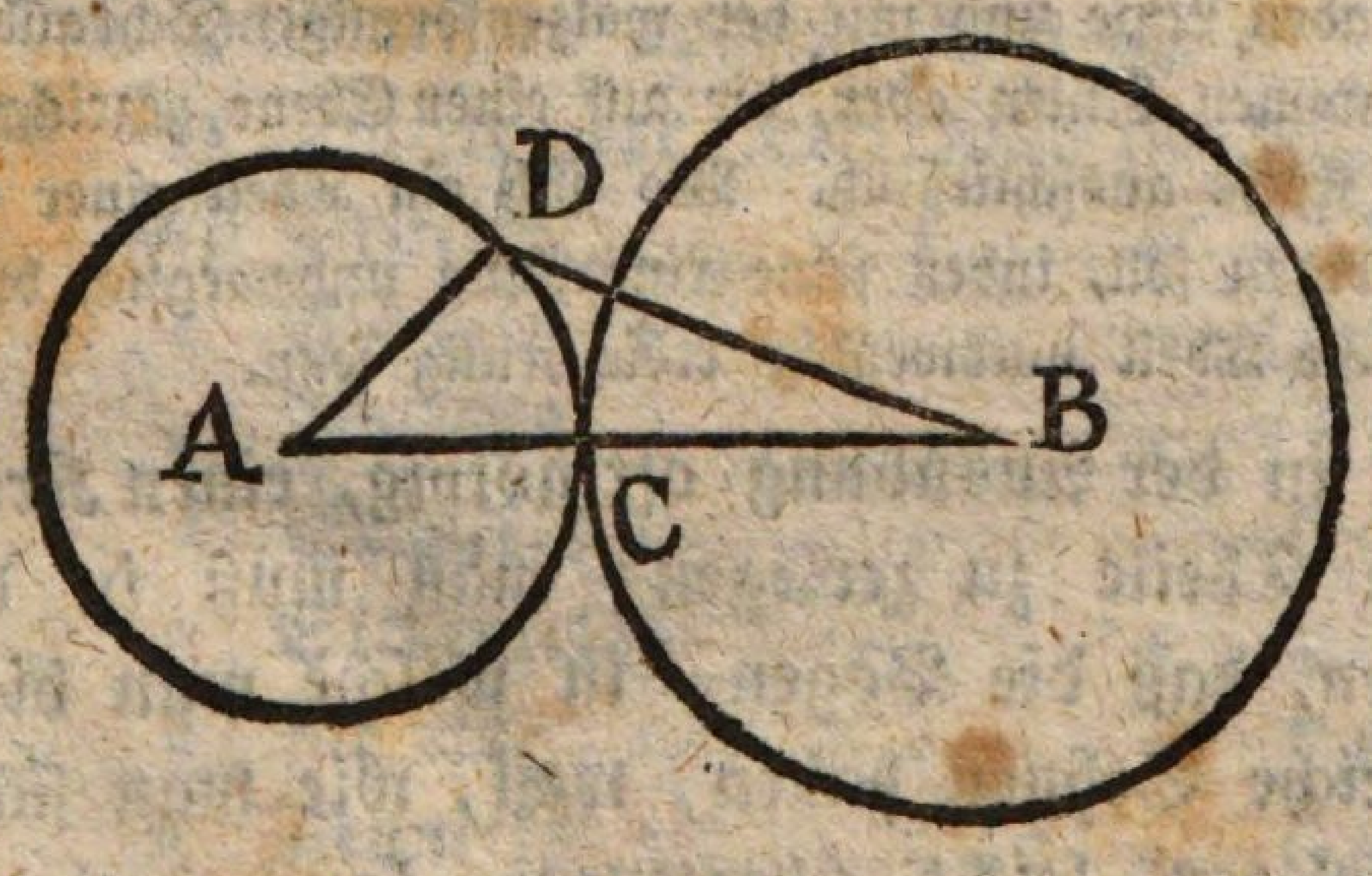
gerade Linie, wie AB, die den Kreis nur in einem einzigen Punkte berührt, nennt man eine Streiflinie oder Tangente.

Eine solche Tangente AB hat die Eigenschaft, daß die von ihr berührte Kreislinie sich um den Mittelpunkt O drehen kann, indeß sie unbeweglich bleibt, ohne daß die Bewegung gehindert sey, und ohne daß der Berührungspunkt verändert werde. Diese Eigenschaft benutzt der Drechsler, um eine Fläche nach einem kreisförmigen Umfang zu schneiden. Sie ist auch die Ursache, warum die Schleifsteine vollkommen rund seyn müssen.

Man kann auch umgekehrt die Kreislinie unbewegt lassen; hingegen aber die Tangente so drehen, daß immer derselbe ihrer Punkte die Kreislinie berührt. Diese Eigenschaft wird ebenfalls von den Drechslern benutzt, um einen festgemachten Körper kreisförmig zu schneiden.

Wenn ein Kreis auf einer geraden Linie oder einer Ebene fortrollt, so bleibt die Linie, auf der er sich bewegt, immer eine Tangente, und der Halbmesser, welcher durch den Berührungspunkt geht, steht auf derselben senkrecht; auch beschreibt der Mittelpunkt bei der Bewegung eine gerade Linie, welche mit derjenigen, auf welcher sich der Kreis bewegt, gleichlaufend ist. Diese Eigenschaft wird sowohl beim Fuhrwesen benutzt, als auch wo Körper durch Walzen fortgeschoben werden; auch benutzt man sie im Maschinenwesen, wo eine gerade Linie mit großer Genauigkeit so fortbewegt werden soll, daß sie immer mit einer andern gleichlaufend bleibe.

Wenn zwei Kreislinien auf einer Ebene liegen, so nennt man die gerade Linie, welche ihre zwei Mittelpunkte verbindet, die Zentrallinie.



Zwei Kreise berühren sich einander außerhalb in einem Punkte C, wenn ihre Zentrallinie AB genau so groß ist, als

ihre zwei Halbmesser AC und BC zusammen. Hätten sie außer dem Punkte C noch einen andern gemeinschaftlichen Punkt D, so wäre die gebrochene Linie ADB so groß als die zwei Halbmesser zusammen, und folglich eben so groß, als die Zentrallinie AB, welche dieselben Endpunkte hat, welches unmöglich ist.

Es kann jeder dieser beiden Kreise, oder auch beide zugleich, sich um seinen Mittelpunkt drehen, ohne von dem andern gehindert zu werden, und ohne daß die Berührung aufhört. Es kann aber durch die Reibung oder durch in einander greifende Zähne gemacht werden, daß einer der beiden Kreise durch seine Drehung den andern nöthiget, sich ebenfalls, und zwar in einer entgegengesetzten Richtung zu drehen, welches beim Maschinenwesen sehr oft geschieht. Wenn indessen neben dem zweiten Kreise noch ein dritter angebracht ist, der durch die Bewegung des zweiten um seinen Mittelpunkt gedreht wird, so wird sich dieser wieder in derselben Richtung bewegen, als der erste. Wenn auch zwei Kreise sich nicht berühren, sondern ganz aus einander stehen, kann man doch vermittelst eines sie beide umfassenden Riemens machen, daß die Drehung des einen dem andern in entgegengesetzter Richtung mitgetheilt werde. Will man, daß die zwei Kreise sich in derselben Richtung bewegen, so läßt man den Riemen sich durchkreuzen. Wenn der Riemen durch den Gebrauch oder durch die Wärme zu lang wird, so kann er durch einen dritten unbeweglichen Kreis, der zwischen die zwei beweglichen angebracht wird, gespannt werden.

Da der Kreis in allen seinen Theilen dieselbe Krümmung hat, so kann er sich innerhalb einer ihn genau umschließenden Umhüllung in seiner eigenen Richtung bewegen, diese Eigenschaft theilt er mit der geraden Linie und mit der walzenförmigen Schraubenlinie; unter den krummen Linien aber, die auf einer Ebene gezeichnet sind, besitzt sie der Kreis ausschließlich. Wo sich ein Theil einer Ebene um sich selbst drehen soll, indeß seine Einfassung unbeweglich bleibt, muß der bewegliche Theil nothwendig kreisförmig seyn.

Es ist in der Ausübung oft nöthig, einen Kreis in mehrere gleiche Theile zu zerlegen; man muß in diesem Falle darauf sehen, daß die Bogen, in welche man die Kreislinie zerlegt, gleiche Sehnen haben, weil, wie man sich durch das Aufeinanderlegen leicht überzeugen kann, gleichen Bogen gleiche Sehnen entsprechen und umgekehrt. Das Halbiren

einer Kreislinie geschieht, wie wir schon gesehen haben, durch jeden beliebigen Durchmesser. Zieht man zwei Durchmesser, die auf einander senkrecht stehen, so wird die Kreislinie dadurch in vier gleiche Bogen zerlegt, und da wir schon gezeigt haben, wie ein Bogen zu halbiren sey, so ist es dadurch auch leicht, die Kreislinie in 8, 16, 32, 64 ꝛc. gleiche Bogen zu theilen.

Es wird in der Folge bewiesen werden, daß die Sehne vom sechsten Theile der Kreislinie dem Halbmesser gleicht, wodurch man auch ohne Mühe die Kreislinie in 6 gleicht Bogen zerlegen kann. Nimmt man von diesen 6 Theilen je zwei und zwei neben einander liegende Theile zusammen, so ist die Kreislinie in drei gleiche Bogen zerlegt. Vermittelst der Eintheilung in 6 gleiche Theile kann man übrigens auch die in 12, 24, 48 ꝛc. gleiche Theile herausbringen.

Die Geometrie giebt auch ein Mittel die Kreislinie in 10 und dadurch in 5, 20, 40, 80 ꝛc. gleiche Bogen einzutheilen, und da $\frac{1}{15}$ soviel ist, als $\frac{1}{6}$ weniger $\frac{1}{10}$, so erhält man auch den 15ten Theil der Kreislinie, wenn man den 10ten Theil vom 6ten Theil abschneidet. Durch den 15ten Theil findet man dann auch den 30sten, 60sten und 120sten Theil ꝛc. In den meisten Fällen mag es indessen bequemer seyn, wenn man sich statt der streng geometrischen Methode folgender Tabelle bedient, welche die Länge der Sehnen für die Theile der Kreislinie von 2 bis 12 angiebt, wobei 10,000 für die Länge des Halbmessers angenommen ist.

Die	Sehne	der	Hälfte	der	Kreislinie	ist	20,000
„	„	des	Drittels	„	„	„	17,232
„	„	„	Viertels	„	„	„	14,145
„	„	„	Fünftels	„	„	„	11,746
„	„	„	Sechstels	„	„	„	10,000
„	„	„	Siebentels	„	„	„	8,672
„	„	„	Achtels	„	„	„	7,654
„	„	„	Neuntels	„	„	„	6,840
„	„	„	Zehntels	„	„	„	6,180
„	„	„	Elftels	„	„	„	5,524
„	„	„	Zwölftels	„	„	„	5,176

Es ist bei dieser Gelegenheit zu bemerken, daß überhaupt die Aufgabe, welche die Theilung der Bogen in viele gleiche Theile betrifft, (außer in 2, 4, 8, 16 ꝛc. Theile) bis jetzt noch nicht streng geometrisch aufgelöst werden konnte.

Wenn man aus dem Scheitel eines Winkels mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen beschreibt, dessen 2 Endpunkte auf den 2 Schenkeln des Winkels liegen, so ist dieser Bogen um so größer, je größer der Winkel ist, so daß bei gleichem Halbmesser für einen doppelten Winkel der Bogen doppelt, für einen dreifachen drei Mal so groß ist ꝛc. Ist der Winkel $= 90^{\circ}$, so ist der zwischen seinen Schenkeln enthaltene Bogen ein Viertel der ganzen Kreislinie, was man auch einen Quadranten nennt.

So wie der rechte Winkel in 90 Winkelgrade getheilt wird, so theilt man den Quadranten in 90 Bogengrade, den Grad wiederum in 60 Minuten ꝛc. Die ganze Kreislinie hat demnach 360 Bogengrade. Da die Winkel in demselben Verhältnisse zu und abnehmen, als die zwischen ihren Schenkeln enthaltenen Bogen von gleichem Halbmesser, so folgt daraus, daß jeder Winkel genau so viele Winkelgrade habe, als jene Bogen Bogengrade. (Es ist wohl zu bemerken, daß hier überall von Bogen die Rede ist, die aus den Scheiteln der Winkeln, als Mittelpunkte, beschrieben werden.)

Wie viel Grade enthält die Hälfte, das $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{45}$, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{120}$ der Kreislinie?

Wie viel Minuten und Sekunden enthält die ganze Kreislinie?

Man benutzt vorzüglich die Eintheilung der Kreisbogen in der Geographie, um genau die Lage eines jeden Ortes auf der Oberfläche der Erde anzugeben. Die Erde dreht sich nemlich um eine gerade Linie in ihrem Innern, welche man die Erdaxe nennt. Die zwei Endpunkte der Erdaxe heißen die Pole. Einer derselben liegt in den russischen Gewässern und heißt der Nordpol, der entgegengesetzte heißt der Südpol. Alle Kreislinien, welche durch beide Pole gehen, heißen Mittags-Linien oder Meridiane. Durch jeden Punkt auf der Oberfläche der Erde kann ein Meridian gezogen werden, und derjenige, welcher durch die Insel Fero an der westlichen Küste von Afrika geht, heißt der erste Meridian.

Eine Kreislinie, welche in allen ihren Punkten gleich weit von beiden Polen entfernt ist, heißt der Aequator. Die genaue Lage eines Ortes auf der Oberfläche der Erde wird angegeben durch seine Länge und seine Breite. Die Länge ist die Zahl der Grade des Aequatorbogens zwischen dem Meridian des Ortes und dem ersten Meridian. Die Breite ist die Zahl der Grade des Meridianbogens zwischen dem Orte und dem Aequator. Sie ist entweder nördlich oder südlich, je nachdem der Ort sich zwischen dem Aequator und dem Nordpol oder zwischen dem Aequator und dem Südpol befindet.

Die Eintheilung des Kreises in gerade Linien ist besonders von großer Wichtigkeit bei der Verfertigung der gezahnten Räder und der geriffelten Walzen, welche in den Maschinen gebraucht werden, da sonst keine Genauigkeit im Eingreifen zu erwarten ist.

Als ein bequemes Mittel die Kreislinie in gleiche Theile zu zerlegen, möge noch Folgendes erwähnt werden. Man beschreibe aus demselben Mittelpunkte mit verschiedenen Halbmessern mehrere Kreislinien, theile die erste in 3, die zweite in 4, die dritte in 5 gleiche Theile 2c. Die Unterschiede der Theile der auf einander folgenden Kreise sind dann $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$ u. s. w.

Vierter Abschnitt.

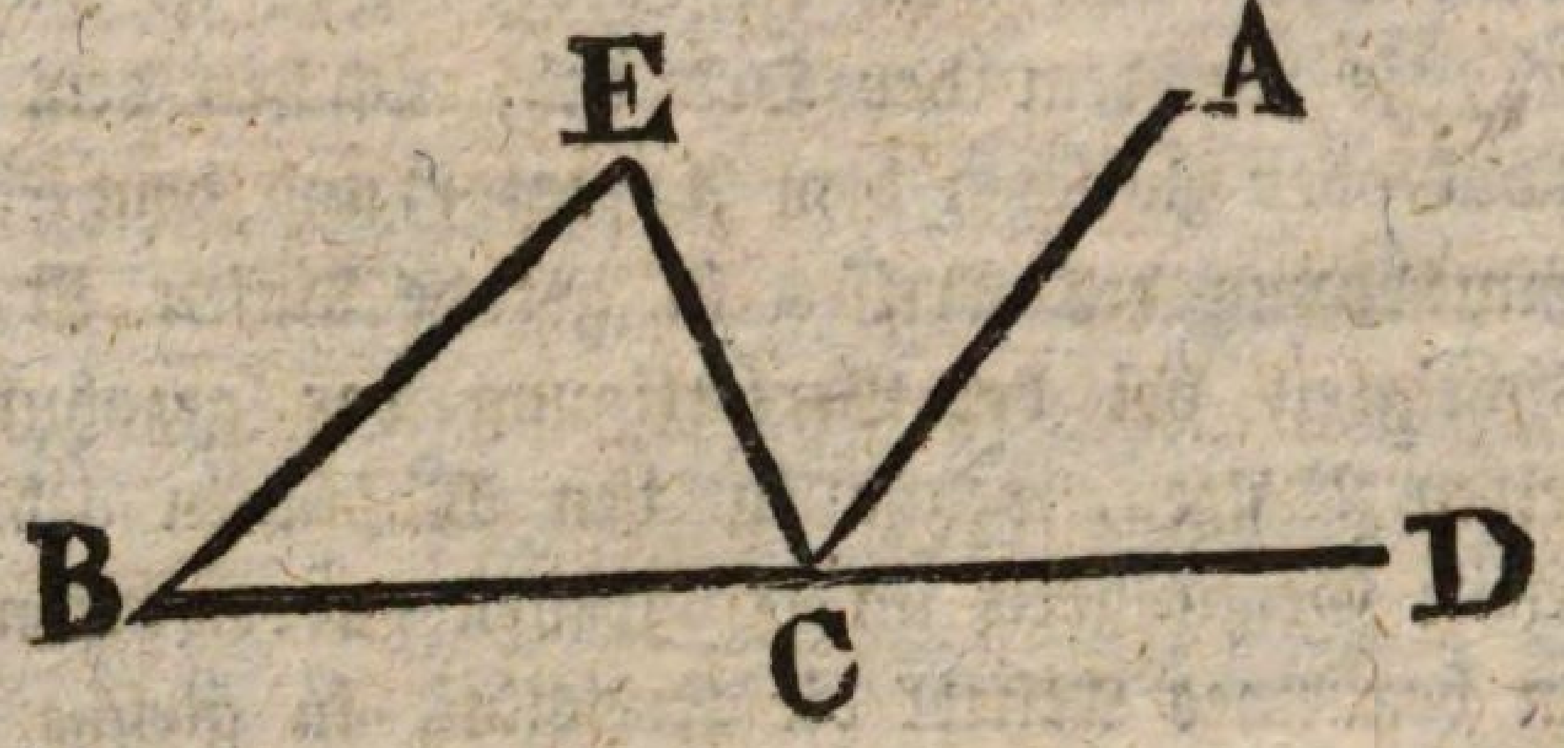
Von den geradlinigen Figuren.

Jeder Theil einer Ebene, der von Linien umschlossen ist, heißt eine Figur.

Eine Figur, die von lauter geraden Linien eingeschlossen ist, heißt eine geradlinige Figur, oder ein Vieleck. Man unterscheidet die Vielecke nach der Anzahl der sie umschließenden geraden Linien; es gibt demnach Dreiecke, Vierecke, Fünfecke 2c.

Das einfachste aller Vielecke ist das Dreieck, weil man mit weniger als drei geraden Linien keinen Raum einschließen kann.

In jedem Dreiecke sind sechs Stücke zu bemerken: drei Seiten und drei Winkel.



Verlängert man eine Seite BC eines Dreieckes EBC um ein unbestimmtes Stück CD, so heißt der Winkel ECD, den die Verlängerung mit der Seite EC bildet, ein Außenwinkel.

Der Außenwinkel ECD ist genau so groß als die Summe der zwei innern Winkel E und B, welche nicht seine Nebenwinkel sind; denn zieht man durch C eine gerade Linie CA, gleichlaufend mit EB, von unbestimmter Länge, so wird dadurch der Außenwinkel in zwei Winkel ACE und ACD zerlegt; nun gleicht aber der Winkel ACE dem Winkel BEC als Wechselwinkel von innen, und der Winkel ACD dem Winkel EBC als Wechselwinkel von außen und innen; folglich ist der Außenwinkel ECD, welcher aus den zwei Winkeln ECA und ACD besteht, so groß als die Summe der Winkel BEC und EBC.

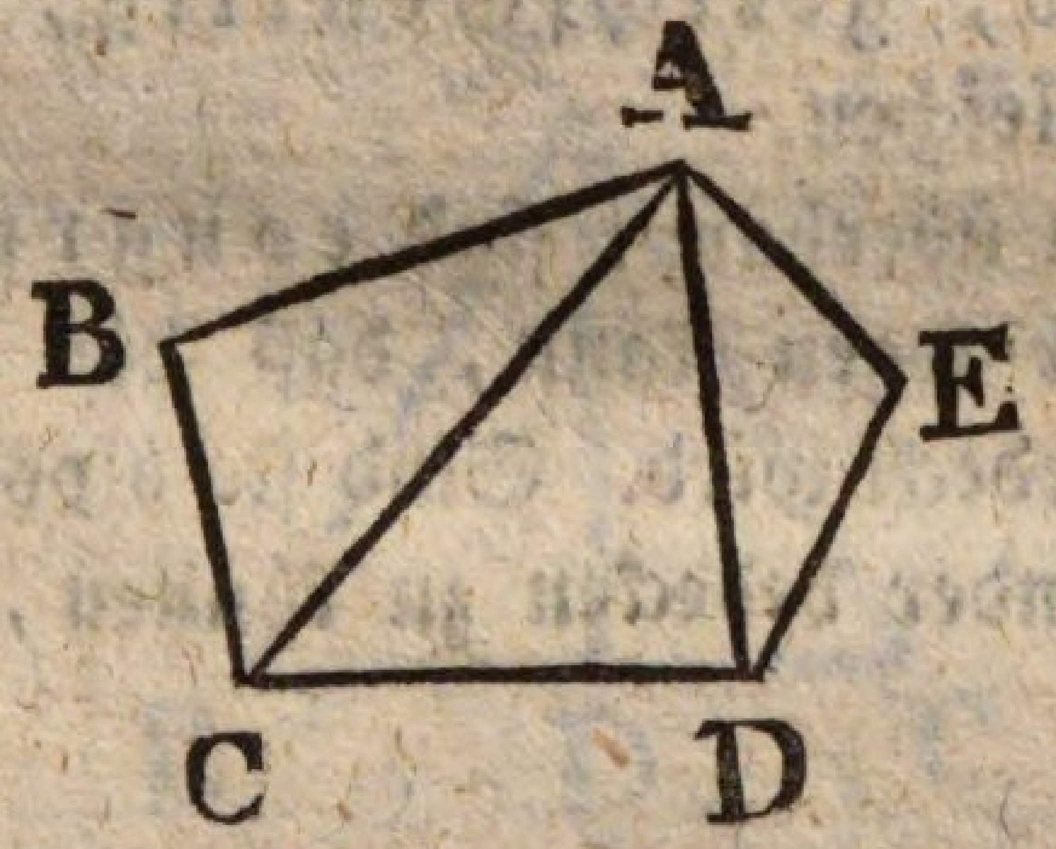
Es folgt hieraus daß in jedem Dreiecke EBC die Summe der drei Winkel CEB, EBC und ECB zusammengenommen zwei rechte Winkel oder 180° ist; denn die Summe der zwei ersten gleicht dem Außenwinkel ECD, und diesem fehlt der Winkel ACB als Nebenwinkel an 180°, oder, was auf dasselbe herauskommt, die drei Winkel des Dreiecks sind 180° zusammen.

Vermittelst dieses Satzes kann man, wenn zwei Winkel eines Dreieckes gegeben sind, den dritten finden, indem man

die zwei gegebenen addirt, und die gefundene Summe von 180° abzieht, und es folgt hieraus, daß wenn zwei Dreiecke zwei Paar gleiche Winkel haben, das dritte Winkelpaar auch gleich seyn müsse.

Wenn die drei Winkel eines Dreieckes einander gleichen, so ist jeder 60°.

Wenn unter den drei Winkeln ein rechter Winkel ist, so sind die zwei andern spitzig und 90° zusammen. Sind diese zwei spitzigen Winkel einander gleich, so hält jeder derselben 45°.



Um die Summe sämmtlicher Winkel eines Vieleckes ABCDE zu finden, zerlege man es vermittelst der Querlinien (Diagonalen) AC, AD in Dreiecke, und nehme dann für jedes Dreieck 180°. Man kann sich leicht überzeugen, daß die Anzahl dieser Dreiecke immer um zwei weniger ist, als die Anzahl der Seiten des Vieleckes; folglich wird die Summe sämmtlicher Winkel gefunden, wenn man die Seitenzahl des Vieleckes um zwei vermindert, und mit dem herauskommenden 180° multiplizirt. Wenn alle Winkel eines Vieleckes einander gleichen, so findet man die Größe eines jeden, indem man die Summe sämmtlicher Winkel durch die Seitenzahl des Vieleckes dividirt.

Wenn zwei Winkel eines Dreieckes 56° 35′ 12″ und 48° 29′ 15″ sind, wie groß ist der dritte?

Wenn ein Winkel eines Dreieckes 78° 26′ 44″ hält und die zwei andern sind einander gleich, wie groß ist jeder derselben?

Wie groß ist die Summe sämmtlicher Winkel eines 4, 5, 6eckes ꝛc. und wie groß ist jeder einzelne, wenn in solchen Vielecken alle Winkel einander gleich sind?

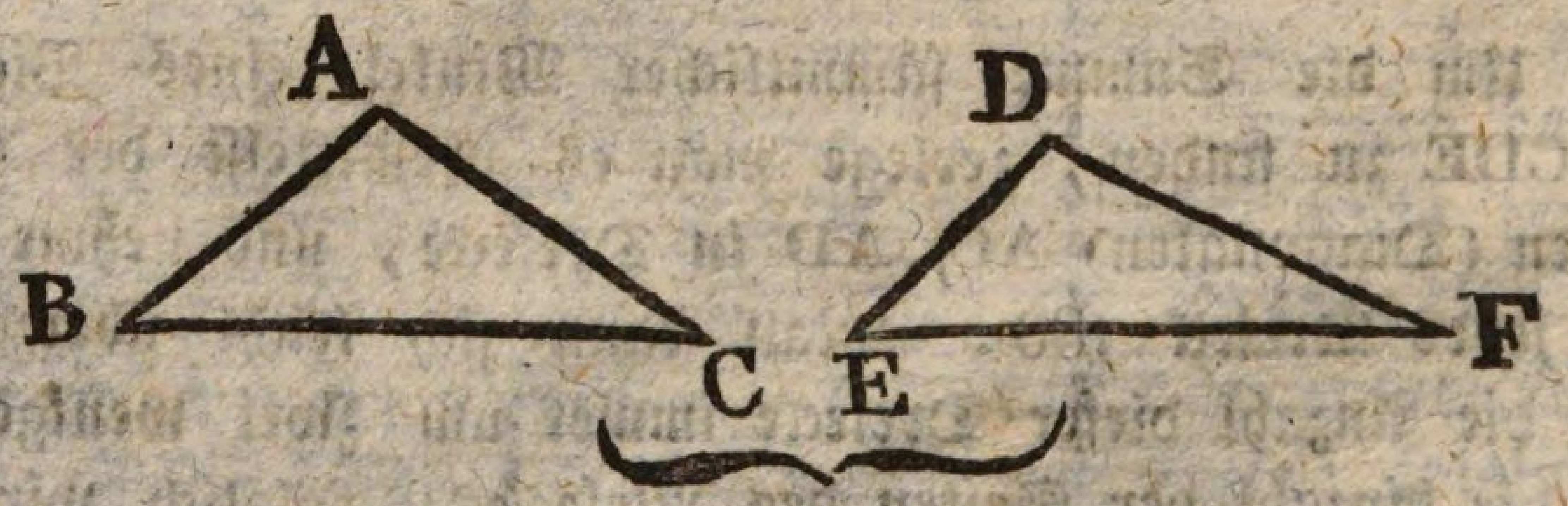
Wenn ein Viereck zwei Winkel hat, von welchen jeder 115° 20′ hält, und die zwei andern sind einander gleich, wie groß ist jeder derselben?

Wenn drei Winkel eines Fünfeckes rechte Winkel sind, und die zwei andern sind einander gleich, wie groß ist jeder von beiden?

Wenn unter den drei Winkeln eines Dreiecks ein rechter Winkel ist, so ist es ein rechtwinkliges Dreieck; die zwei Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten, und die, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, heißt die Hypotenuse.

Ein Dreieck ist gleichseitig, wenn seine drei Seiten einander gleich sind, gleichschenklig, wenn nur zwei Seiten einander gleichen.

Zwei Figuren überhaupt sind congruent, wenn man sie so auf einander legen kann, daß die eine vollkommen von der andern bedeckt wird. Sind sie blos gleich an Flächeninhalt, ohne einander bedecken zu können, so sind sie gleichhaltig.

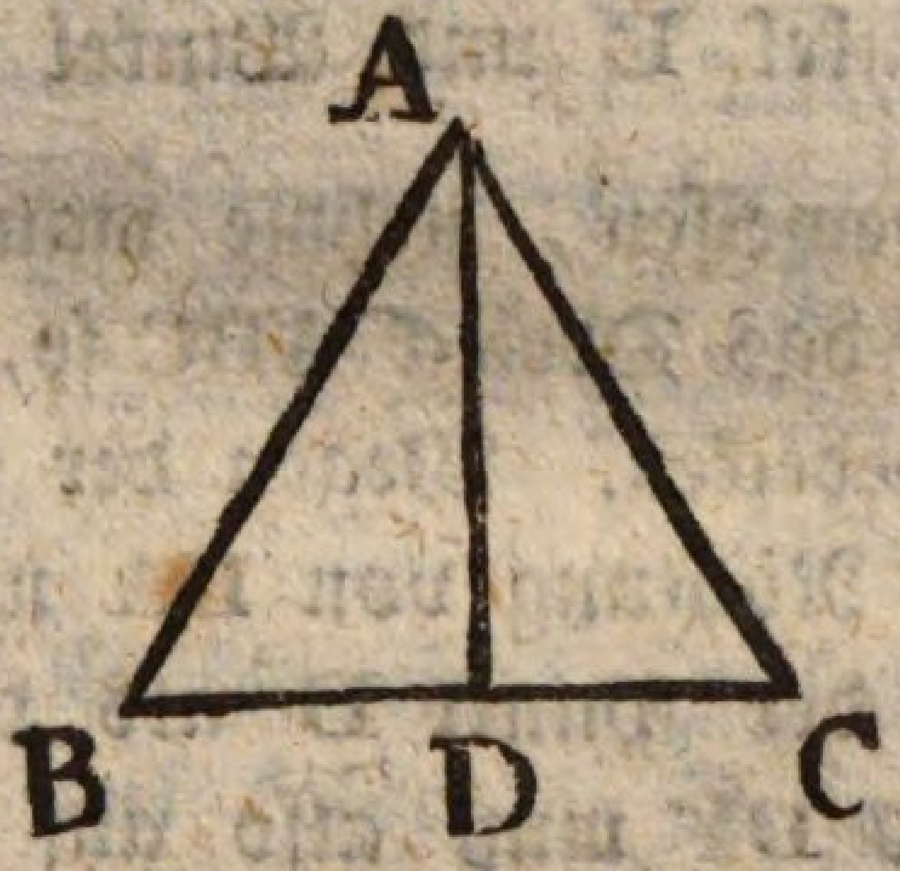


Zwei Dreiecke ABC, DEF sind natürlich congruent, wenn der Umfang des einen ganz so gestaltet ist wie der des andern. Nun sind in dem Umfange eines Dreieckes 6 Dinge zu beachten: drei Seiten und drei Winkel, und es scheint, daß man in Beziehung auf jedes dieser 6 Stücke die 2 Dreiecke vergleichen müsse, um zu erfahren, ob sie congruent sind oder nicht; in der That aber sind hiezu drei Vergleichungen, mit schicklicher Auswahl, hinreichend.

Zwei Dreiecke sind nemlich congruent:

1) Wenn sie zwei Paar gleiche Seiten haben, die ein Paar gleiche Winkel bilden, wenn z. B. AB = DE, AC = DF und Winkel A = Winkel D.

Um dies zu beweisen, denke man sich das Dreieck DEF beweglich und lege es so auf das Dreieck ABC, daß die Seite DE die Seite AB bedecke, welches, wegen Gleichheit dieser zwei Seiten, möglich ist; die Seite DF wird alsdann die Richtung der Seite AC nehmen, weil sonst die Winkel A und D nicht einander gleich wären, und da überdies DF und AC gleiche Länge haben, so muß auch der Punkt F auf den Punkt C, mithin auch die Seite EF auf die Seite BC fallen, und die zwei Dreiecke bedecken sich vollkommen einander.



Es läßt sich hierdurch beweisen, daß in einem gleichschenkligen Dreiecke ABC die Winkel B und C, welche den gleichen Seiten AB und AC gegenüberstehn, einander gleich sind; denn zieht man durch die Spitze A eine gerade Linie AD, welche den Winkel BAC halbirt, so erhält man zwei Dreiecke ABD, ACD, welche congruent sind, indem sie zwei Paar gleiche Seiten haben, die ein Paar gleiche Winkel bilden: AB = AC, AD = AD und Winkel BAD = Winkel DAC; die zwei Dreiecke sind also congruent und Winkel B = Winkel C.

Aus der Congruenz der zwei Dreiecke BAD, CAD ergibt sich auch, daß BD = DC und daß Winkel BDA = Winkel CDA. oder daß AD auf BC senkrecht steht.

Es sind dadurch folgende Sätze erwiesen oder leicht erweislich:

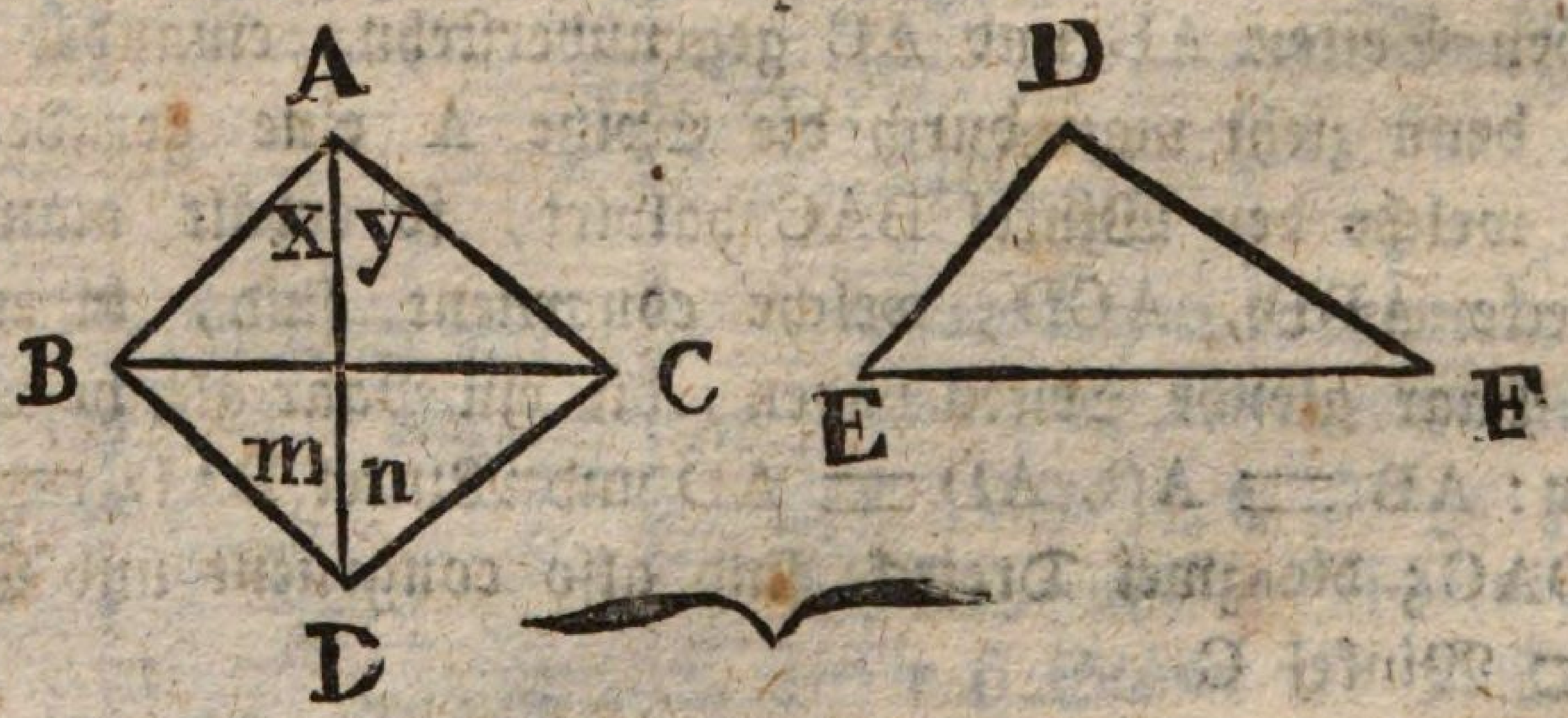
a) Die gerade Linie AD, welche den Winkel A an der

Spitze eines gleichschenklichen Dreieckes halbirt, steht auch senkrecht auf der Grundlinie BC und theilt dieselbe in zwei gleiche Hälften.

b) Eine senkrechte Linie DA, welche über die Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes erhoben wird, geht durch die Spitze A und halbirt den der Grundlinie gegenüberstehenden Winkel.

2) Zwei Dreiecke ABC, DEF (s. S. 24) sind congruent, wenn eine Seite und die zwei anliegenden Winkel in dem einen so groß sind als in dem andern; wenn z. B. BC = EF, Winkel B = Winkel E und Winkel C = Winkel F.

Um dies zu beweisen, nehme man das Dreieck DEF und lege es so auf das Dreieck ABC so, daß die Seiten BC und EF einander bedecken. Wegen der Gleichheit der Winkel muß dann ED die Richtung von BA und FD die Richtung von CA nehmen; der Punkt D als der Durchschnittpunkt der Seiten DE und DF muß also auf den Punkt A, als den Durchschnittpunkt der Seiten AB und AC fallen, und die zwei Dreiecke bedecken sich vollkommen einander.



3) Zwei Dreiecke ABC, DEF sind congruent, wenn sie drei Paar gleiche Seiten haben, so daß AB = DE, AC = DF, BC = EF.

Um dies zu beweisen, drehe man das Dreieck DEF um und lege es so wider das Dreieck ABC, daß die Seiten EF und BC einander bedecken, und ziehe dann AD. Der

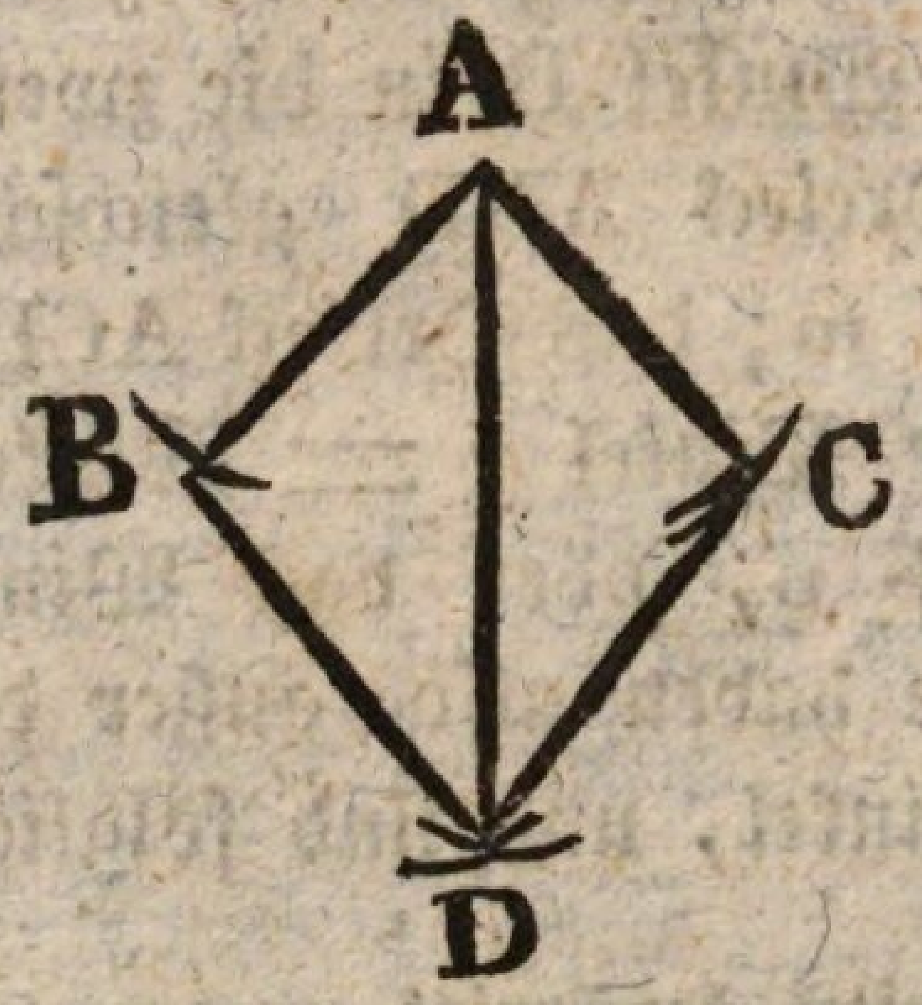
Winkel A wird dadurch zerlegt in die zwei ungleichen Winkel x und y; so auch der Winkel D in die zwei Winkel m und n; nun ist aber das Dreieck ABD gleichschenklig, und daher Winkel x = Winkel m; das Dreieck ACD ist ebenfalls gleichschenklich, und daher Winkel y = Winkel n; hieraus folgt daß x + y = m + n, oder daß Winkel A = Winkel D; die zwei Dreiecke haben also, außer den gleichen Seiten, auch noch gleiche Winkel, und sind folglich congruent.

Wenn ein Dreieck konstruirt werden soll, brauchen nur diejenigen Theile gegeben zu werden, durch welche seine Gestalt bestimmt ist; nämlich entweder zwei Seiten und der von ihnen gebildete Winkel; oder eine Seite und die zwei anliegenden Winkel, oder die drei Seiten. Die Gestalt des Dreieckes ist nicht minder bestimmt, wenn eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberstehender Winkel gegeben sind, weil durch die zwei gegebenen Winkel auch der dritte bestimmt ist. (s. S. 22)

Wenn die drei Seiten eines Dreiecks gegeben sind, so konstruirt man es auf folgende Weise: Man macht eine grade Linie so groß als die gegebene Seite und beschreibt aus ihren beiden Endpunkten mit zwei Halbmessern, die den zwei andern Seiten gleichen, zwei Bogen, deren Durchschnittpunkt die dritte Spitze des Dreiecks ist, welche alsdann mit den zwei Endpunkten der ersten Seite durch gerade Linien verbunden wird.

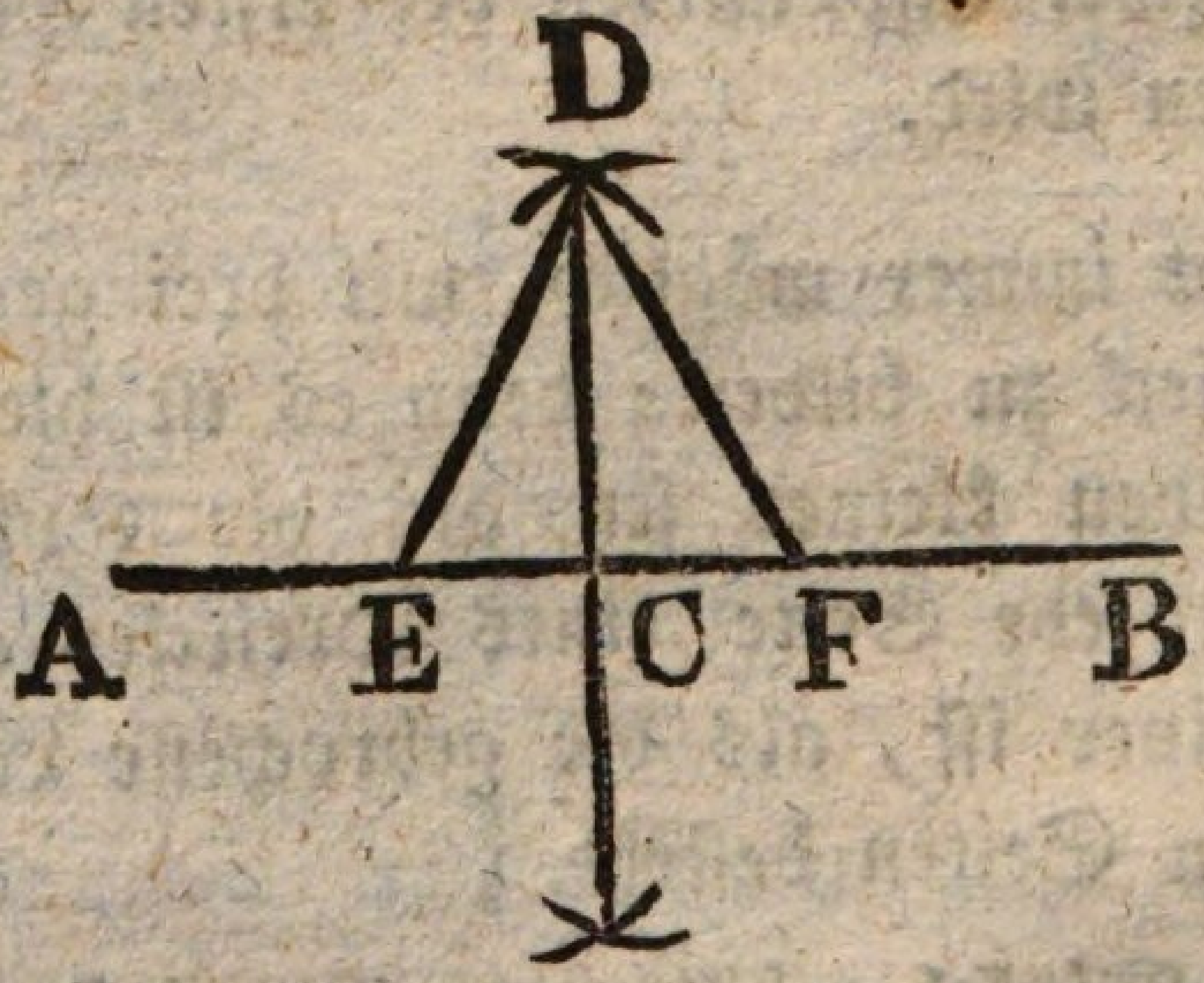
Es ist nicht immer möglich, mit drei gegebenen geraden Linien ein Dreieck zu bilden; denn es ist hierzu erforderlich, daß jede derselben kleiner sey als die Summe der beiden andern, indem jede Seite eines Dreieckes als gerade Linie nothwendig kleiner ist, als die gebrochene Linie, welche aus den zwei andern Seiten besteht.

Wenn ein Winkel gebildet werden soll, der einem gegebenen Winkel gleiche, so bildet man mit dem gegebenen Winkel vermittelst einer geraden Linie, die seine beiden Schenkel durchschneidet, ein Dreieck, und macht dann ein anderes Dreieck, das demselben gleicht.



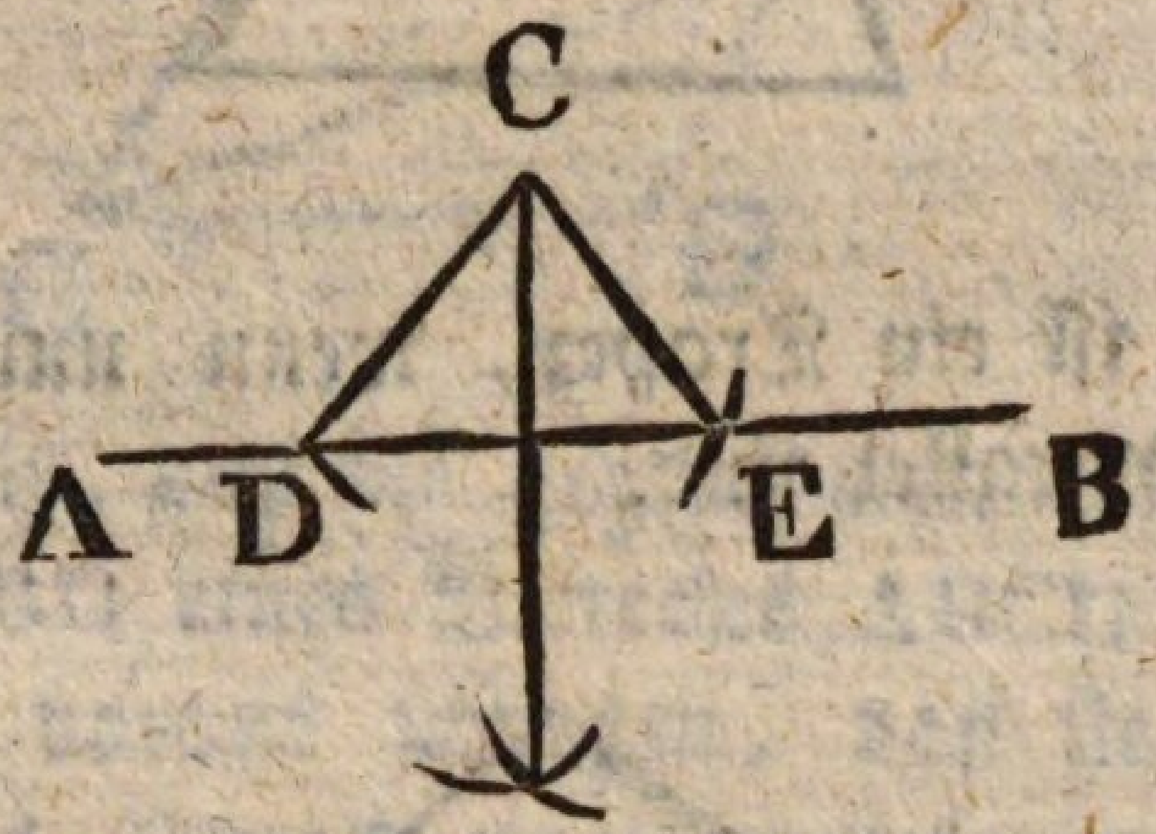
Um einen gegebenen Winkel A zu halbiren, beschreibe man aus seiner Spitze zwei Bogen, mit gleichem Halbmesser, welche seine Schenkel in den Punkten B und C durchschneiden; aus diesen zwei Punkten beschreibe man wiederum mit gleichem Halbmesser zwei Bogen, die sich in D durchschneiden, und ziehe AD, so ist der Winkel A halbirt, denn die zwei Dreiecke BAD, CAD sind congruent, weil sie drei Paar gleiche Seiten haben; mithin ist Winkel BAD = Winkel CAD.

Um eine gerade Linie zu halbiren, macht man sie zur Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, und halbirt den Winkel an dessen Spitze, wodurch dann auch die gegebene Linie halbirt wird.

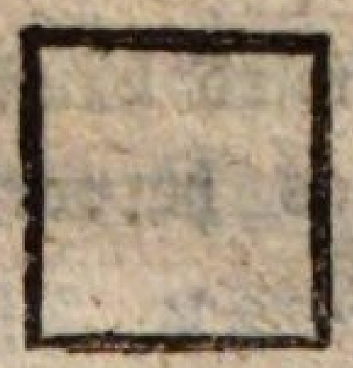


Um über einen Punkt C, der auf einer geraden Linie AB gegeben ist, eine senkrechte Linie zu erheben, trage man auf beide Seiten des Punktes C zwei gleiche Theile CE und CF, konstruire über EF ein gleichschenkliges Dreieck EDF

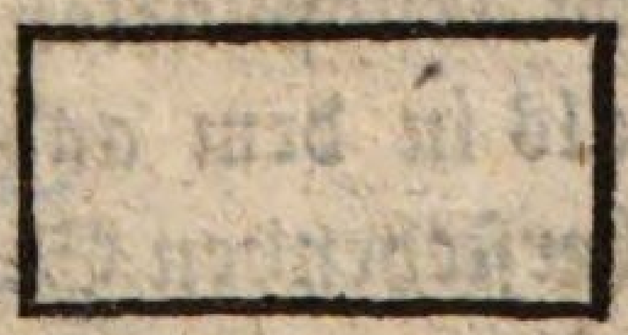
und halbire den Winkel D, so wird die halbirende Linie die verlangte Senkrechte seyn.



Um von einem Punkt C, der außerhalb einer graden Linie AB gegeben ist, eine Senkrechte auf dieselbe fallen zu lassen, beschreibe man aus C mit gleichem Halbmesser zwei Bogen, welche die gegebene Linie in D und E durchschneiden, ziehe CD und CE und halbire den Winkel C des so gebildeten gleichschenkligen Dreiecks DCE, so ist die halbirende Linie die verlangte Senkrechte.



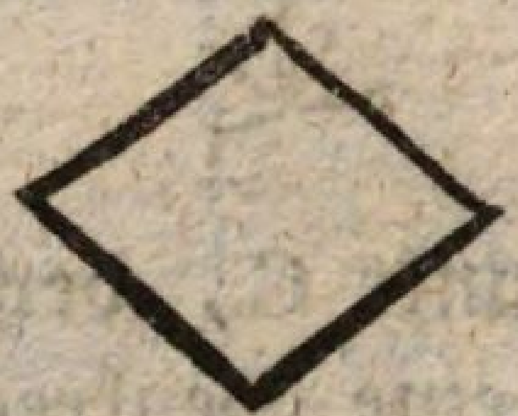
Ein Viereck ist ein Quadrat, wenn die vier Seiten einander gleich, und die vier Winkel rechte Winkel sind.



Ein Viereck ist ein Rechteck, wenn die vier Winkel rechte Winkel sind, ohne daß alle vier Seiten einander gleichen.

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn die gegenüberstehenden Seiten parallel sind.

Ein Viereck ist ein Trapez, wenn nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind.



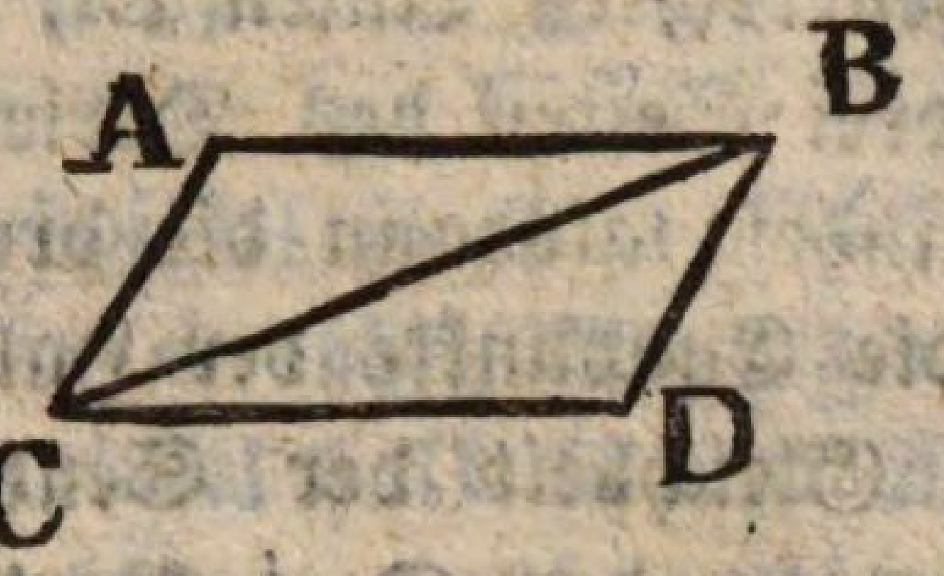
Ein Viereck ist eine Raute, wenn alle vier Seiten einander gleichen.

Die sogenannten gebrochenen Dächer (Mansard-Dächer) sind zusammengesetzt aus einem gleichschenklichen Dreiecke und einem Trapez, dessen nicht parallele Seiten einander gleichen.

Das Parallelogramm wird häufig bei der Verfertigung der Maschinen gebraucht, um das hervorzubringen, was man die gleichlaufende Bewegung nennt.

Wenn man in einem Parallelogramm eine Diagonallinie zieht, so wird es in zwei Dreiecke zerlegt, welche congruent sind, indem außer der gemeinschaftlichen Diagonallinie auch noch die Winkel an den Endpunkten derselben in dem einen Dreiecke so groß sind als in dem andern. Es folgt hieraus, daß sowohl die gegenüberstehenden Seiten, als die gegenüberstehenden Winkel eines Parallelogramms einander gleich sind. Dasselbe gilt auch von dem Quadrate und dem Rechteck, welche im Grunde auch Parallelogramme sind, weil die gegenüberstehenden Seiten auf einer und derselben Linie senkrecht stehen.

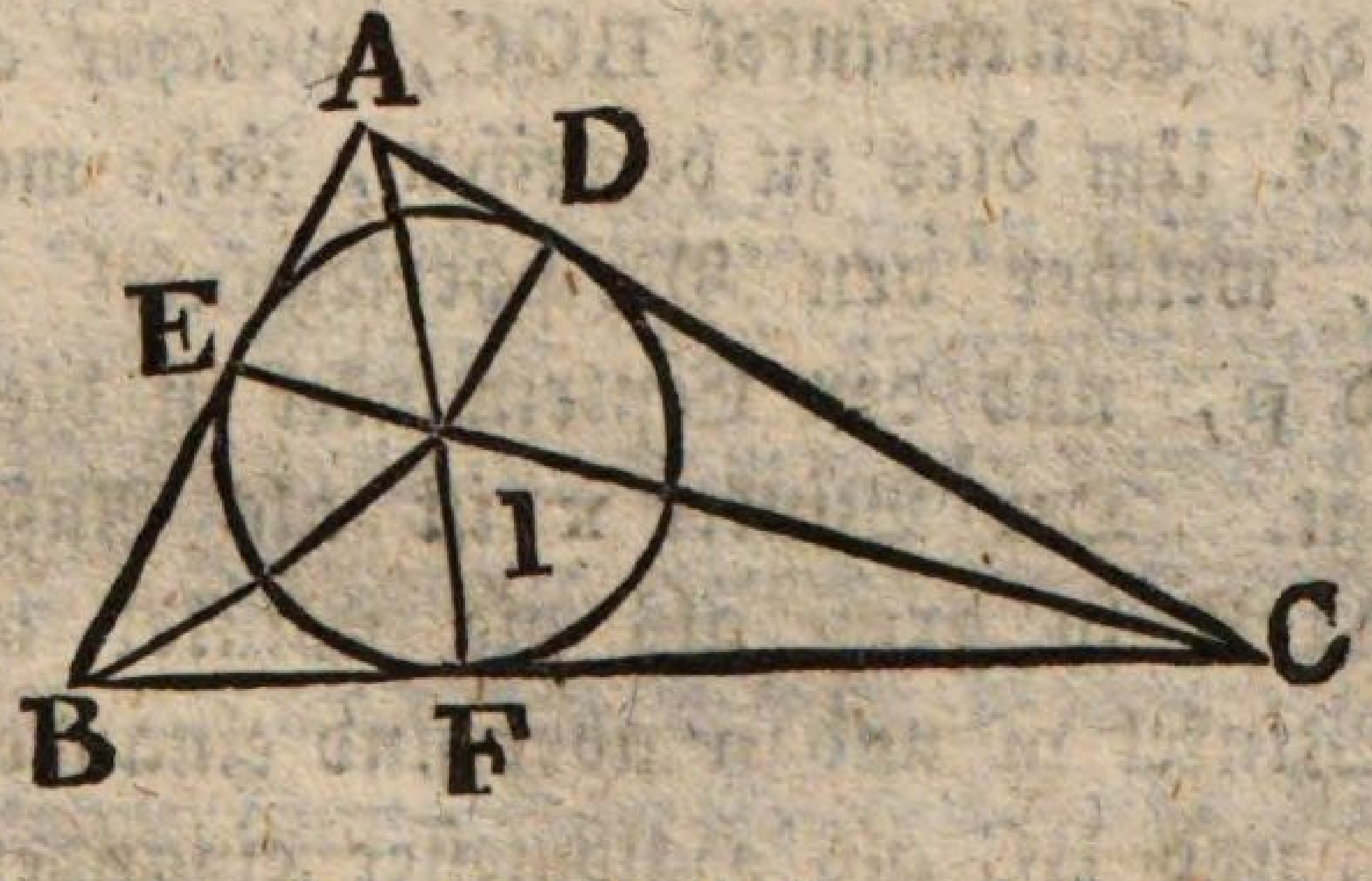
Wenn unter den vier Winkeln eines Parallelogramms einer ein rechter Winkel ist, so sind die drei andern ebenfalls rechte Winkel und man hat ein Rechteck.



Wenn man weiß, daß die gegenüberstehenden Seiten AB und CD, AC und BD eines Viereckes ABCD einander gleichen, so kann man daraus schließen, daß sie auch parallel sind, oder daß das Viereck ein Parallelogramm ist; denn, zieht man die Diagonallinie BC, so wird dadurch das Viereck in zwei Dreiecke ABC, DBC zerlegt, die drei Paar gleiche Seiten haben und daher congruent sind; folglich ist Winkel ABC = Winkel BCD und Winkel ACB = Winkel CBD, die gegenüberstehenden Seiten des Viereckes ABCD sind also parallel, indem die von der durchschneidenden Linie BC gebildeten Wechselwinkel von innen einander gleichen.

Wenn alle Spitzen eines Vieleckes auf einer Kreislinie liegen, so heißt es ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck; sind alle seine Seiten Tangenten einer Kreislinie, so heißt es ein dem Kreise umschriebenes Vieleck.

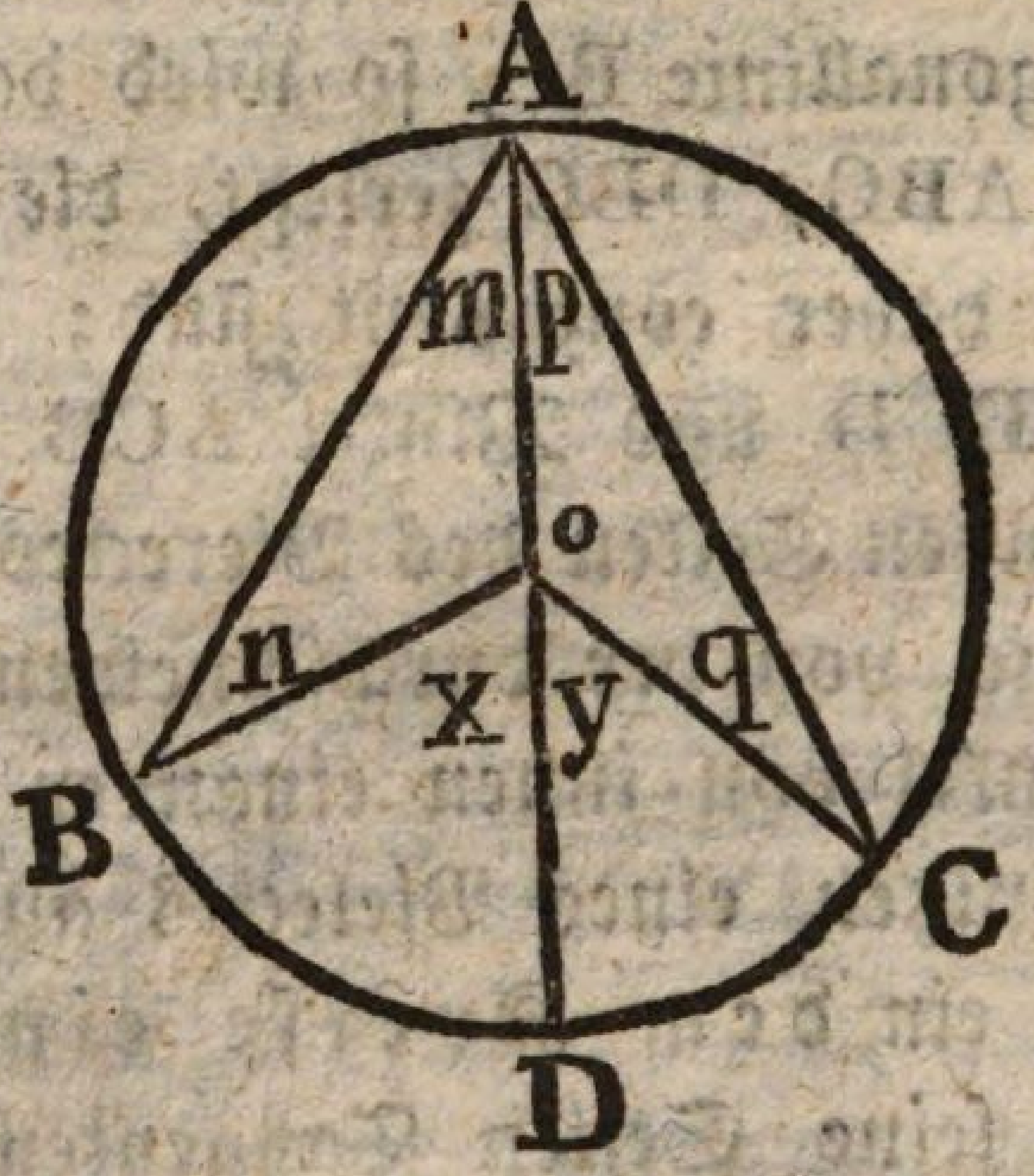
Wir haben schon gesehen, daß man durch drei beliebige Punkte eine Kreislinie gehen lassen kann; man kann also auch jedem Dreiecke eine Kreislinie umschreiben.



Um einem gegebenen Dreiecke ABC eine Kreislinie einzuschreiben, halbire man die Winkel A und B, so wird der Durchschnittpunkt I der zwei halbirenden Linien der verlangte

Mittelpunkt seyn. Um dies zu beweisen, muß bloß gezeigt werden, daß die drei senkrechten Linien EI, DI, FI, welche von demselben auf die drei Seiten des Dreieckes gefällt werden, einander gleichen; indem alsdann die drei Seiten, als Senkrechten, die durch die Endpunkte der Halbmesser gehen, Tangenten sind. Die Gleichheit der Senkrechten EI und DI folgt aus der Congruenz der Dreiecke AEI und DAI, die der Senkrechten IE und IF aus der Congruenz der Dreiecke BEI und BFI.

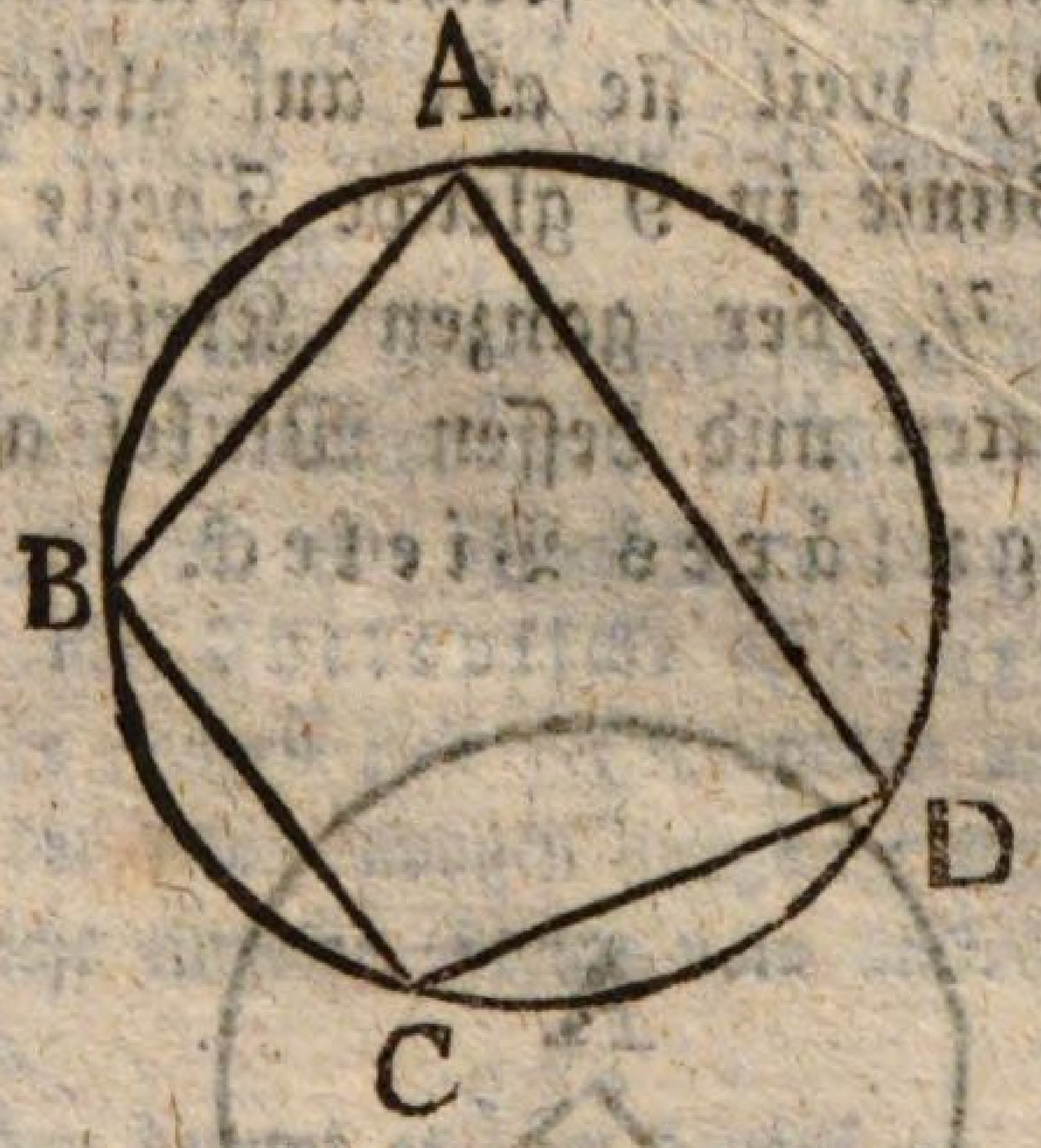
Wie läßt sich beweisen, daß die Linie IC auch den Winkel C halbirt?



Ein eingeschriebener Winkel BAC, dessen Spitze A auf einer Kreislinie liegt, heißt ein Peripheriewinkel; ein Winkel BOC, dessen Spitze im Mittelpunkt ist, heißt ein Centriwinkel. Jeder Peripheriewinkel BAC ist halb so groß, als der Centriwinkel BOC, welcher auf demselben Bogen BC ruht. Um dies zu beweisen, ziehe man den Durchmesser AOD, welcher den Peripheriewinkel in die zwei Winkel m und p, und den Centriwinkel in die zwei Winkel x und y zerlegt. Der Winkel x ist als Außenwinkel für das Dreieck AOB so groß als die Winkel m und n zusammen; die Winkel m und n aber sind einander gleich, weil die Seiten AC und BC als Halbmesser einander gleich sind, und daher das Dreieck AOB gleichschenklich ist; der Winkel x ist also doppelt so groß als der Winkel m; der Winkel y ist gleichfalls doppelt so groß als der Winkel p; folglich

ist der Winkel BOC, welcher aus der Summe der Winkel x und y besteht, doppelt so groß, als der Winkel BAC, welcher aus der Summe der Winkel m und p besteht.

Da ein Zentriwinkel so viele Winkelgrade hat, als der Bogen, auf welchem er ruht, Bogengrade, so folgt daraus, daß ein Peripheriewinkel halb so viel Winkelgrade hat, als der Bogen, auf welchem er ruht, Bogengrade. Wenn also die zwei Schenkel eines Peripheriewinkels durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, oder, was dasselbe ist, wenn der Peripheriewinkel auf einem Bogen ruht, welcher die Hälfte der Kreislinie enthält, so ist derselbe ein rechter Winkel. Stumpfe Peripheriewinkel hingegen ruhen auf Bogen, die größer sind, als die Hälfte der Kreislinie, und spitzige auf Bogen, die kleiner sind.

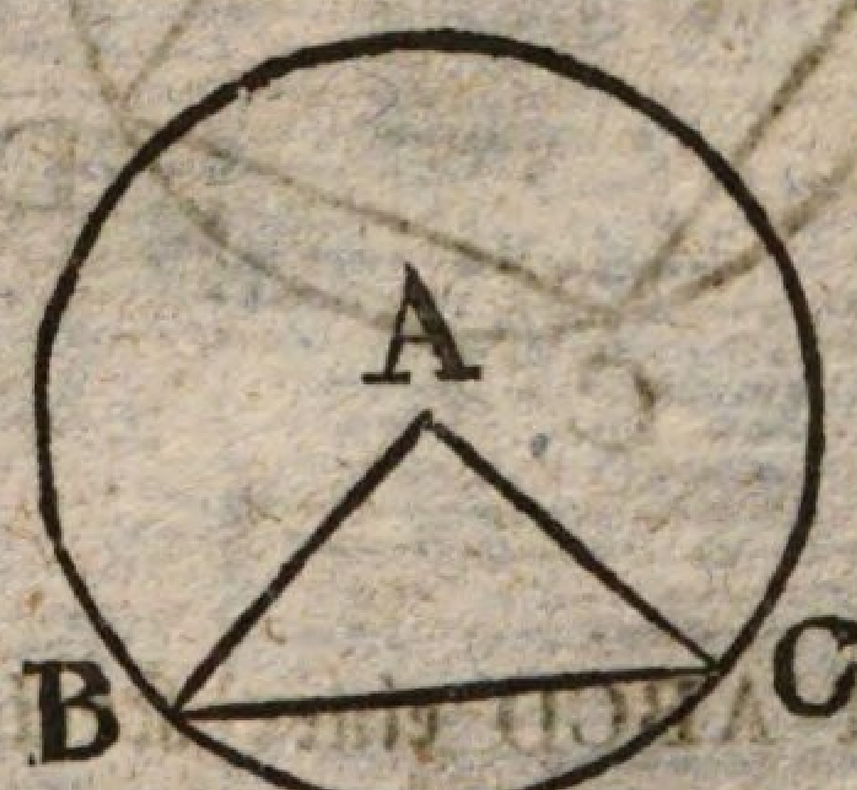


Wenn ein Viereck ABCD einer Kreislinie eingeschrieben ist, so ist die Summe der gegenüberstehenden Winkel A und C = 180°; denn sie haben zusammen halb so viele Winkelgrade, als die ganze Peripherie Bogengrade. Dasselbe gilt von der Summe der Winkel B und D.

Umgekehrt kann jedem Vierecke eine Kreislinie umschrieben werden, wenn die Summe der gegenüberstehenden Winkel 180° ist, welche Eigenschaft beim Quadrat und beim Rechtecke Statt findet.

Wenn mehrere Peripheriewinkel ABC, ADC, AEC auf demselben Bogen AC ruhen, so sind sie alle einander gleich.

Wenn man eine Kreislinie in mehrere gleiche Theile zerlegt und die einander zu nächst liegenden Theilungspunkte durch gerade Linien verbindet, so erhält man ein Vieleck, dessen Seiten, als Sehnen gleicher Bogen, alle einander gleichen. Die Winkel eines solchen Vieleckes sind ebenfalls alle einander gleich, weil sie alle auf gleiche Bogen ruhen; ist z. B. die Kreislinie in 9 gleiche Theile zerlegt, so ruht jeder Winkel auf $^7/_9$ der ganzen Kreislinie. Ein solches Vieleck, dessen Seiten und dessen Winkel alle einander gleichen, heißt ein **reguläres Vieleck**.



Es ist schon bemerkt worden (s. S. 19), daß die Sehne vom 6ten Theile der Kreislinie dem Halbmesser gleicht. Dies gründet sich darauf, daß, wenn der Bogen BC der 6te Theil der Kreislinie ist, der auf ihm ruhende Centriwinkel A 60° hat; die zwei Winkel B und C haben also 120° zusammen, und da diese zwei Winkel einander gleichen, so hat jeder derselben ebenfalls 60°; da nun die drei Winkel des

Dreieckes ABC einander gleichen, so sind die drei Seiten ebenfalls einander gleich, und die Sehne BC gleicht dem Halbmesser.

Die Circumvalitionslinien regelmäßiger Festungen sind reguläre Vielecke, gemeiniglich 5, 6 oder 7ecke, an deren Spitzen Bastionen angebracht sind.

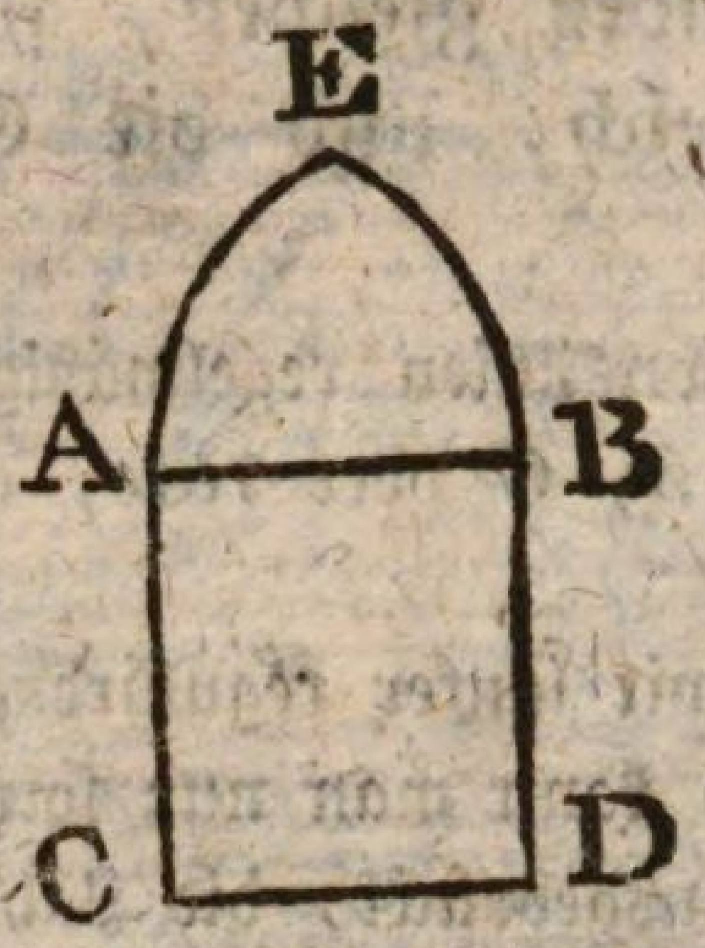
Wenn ein Platz mit lauter regulären, einander gleichen Vielecken belegt werden soll, so kann man nur solche dazu gebrauchen, deren Winkel, in Graden ausgedrückt, die Zahl 360 genau theilen. Dies findet Statt: bei dem gleichseitigen Dreiecke, dem Quadrate und dem Fünfecke, wie leicht zu erweisen ist. Bei Pflasterarbeiten sucht man gewöhnlich zu verhüten, selbst wenn die Steine quadratförmig sind, daß in einem Punkte nicht zu viele Spitzen zusammentreffen.

Am vortheilhaftesten ist dabei der Gebrauch der Sechsecke, weil da die Winkel am größten sind und nur drei Spitzen zusammentreffen.

Die Zellen der Bienenstöcken haben die Gestalt regulärer Sechsecke, welche den Vortheil gewährt, daß aus einer gegebenen Menge Wachs die größte Anzahl von Zellen mit einem bestimmten Flächeninhalt gebildet werden kann.

In alter Zeit hat man große Steinblöcke von verschiedenen unregelmäßigen Gestalten unverändert in Gebäuden und Denkmälern zusammenzufügen gesucht, um ihnen ihre natürliche Größe zu lassen. Man nennt dieß die Cyclopische Bauart. Man hat diese Bauart auch in der neuern Zeit bei Dämmen angewendet, die einem starken Andrange der Meereswogen ausgesetzt sind. Es wird dadurch verhindert, daß nicht einzelne Steine vom anströmenden Wasser herausgehoben werden.

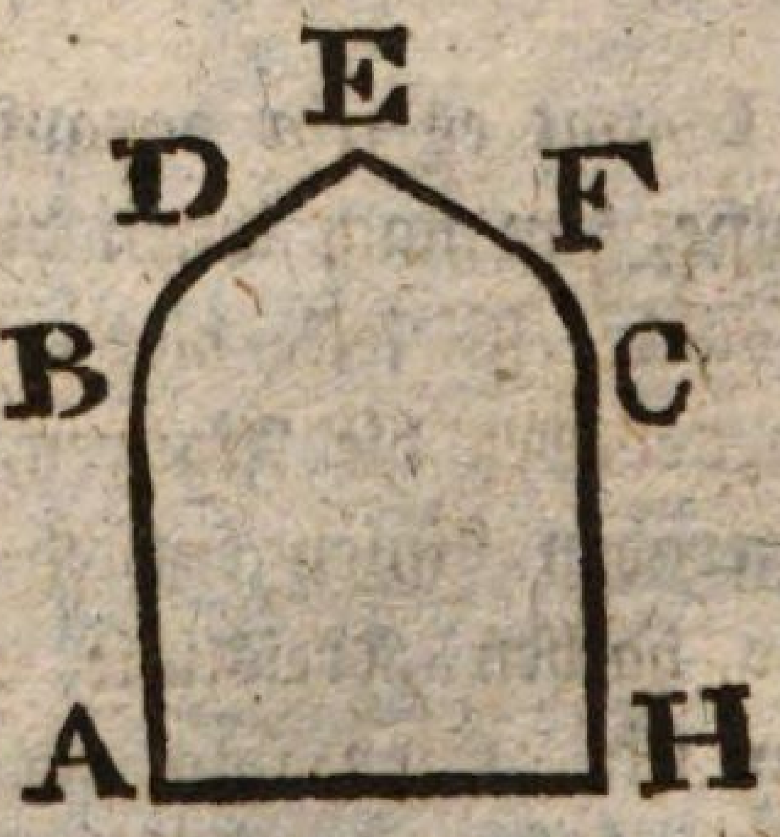
In den Künsten kommt es sehr darauf an, daß man viele Gestalten zu erdenken wisse, um nach ihnen die äußere Form der Kunstwerke zu bilden; schon die Vielecke bieten hiezu eine große Mannigfaltigkeit dar; noch mehr aber die Figuren, welche aus Verbindungen von Kreisbogen mit geraden Linien entstehen, wie z. B. der Raum, welcher zwischen einer halben Kreislinie und dem sie spannenden Durchmesser enthalten ist. Eine solche Gestalt hat der Graphometer, wie mehrere andere, zur Ausmessung der Winkel bestimmten Werkzeuge; ferner findet man diese Gestalt bei den Theatern der Alten und bei den Amphitheatern der neuern Völker. Wenn man den Durchmesser einer solcher Figur zur obern Seite eines darunter angebrachten Rechteckes macht, so erhält man die Gestalt eines Thores mit vollem Bogen.



Beschreibt man hingegen aus den beiden Endpunkten A und B der obern Seite eines Rechteckes ABCD mit der Seite AB als Halbmesser zwei Bogen, die sich im Punkte E durchschneiden, so entsteht daraus die Gestalt eines über den Halbkreis erhobenen Thores. Die erste dieser beiden Gestalten gehört zur griechischen und zur modernen, die zweite zur gothischen Bauart.

Beschreibt man über den zwei gegenüberstehenden Seiten eines Rechteckes zwei Halbkreise, so erhält man die Gestalt der Arenen oder Hippodromen der Alten, welche zum Wettrennen bestimmt waren.

Die modernen, auf zwei Pfeilern ruhenden Brückenbogen bestehen gewöhnlich aus mehreren Kreisbogen, die in den Punkten, wo sie zusammentreffen, einander berühren, so daß jeder wie eine Fortsetzung der ihm zunächst liegenden erscheint. Wo sich zwei Bogen auf diese Weise berühren sollen, muß man Sorge tragen, daß sich der Berührungspunkt mit den zwei Mittelpunkten der Bogen in gerader Linie befinde.



Einige Aehnlichkeit mit den gothischen Gewölben haben die sogenannten Maurischen. Sie bestehen aus zwei Bogen BD und FC die auf zwei senkrechten Pfeilern BA und CH ruhen, und an deren Endpunkten D und F zwei Tangenten angebracht sind, die sich in einem Punkt E durchschneiden.

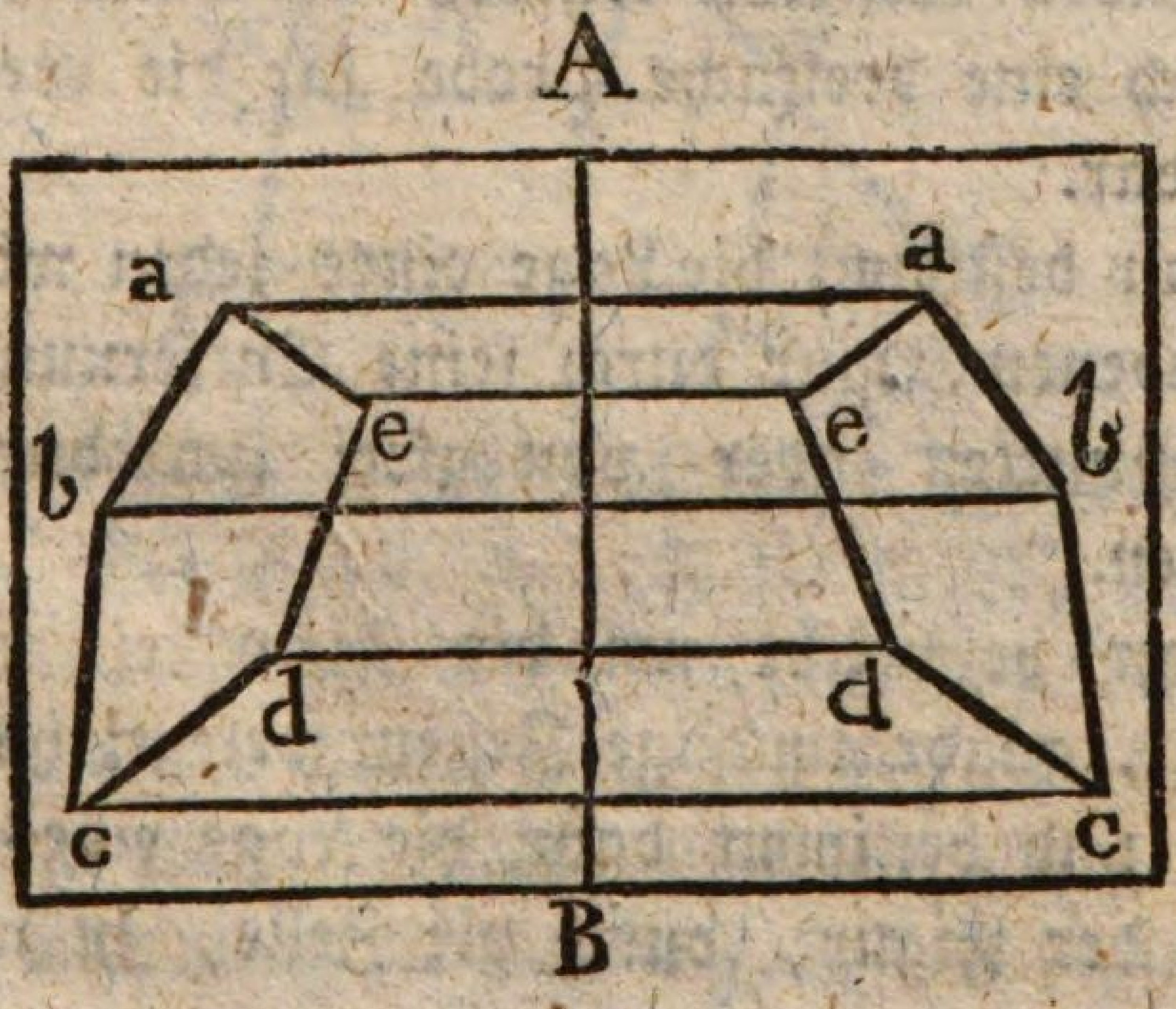
Man findet bei den Gesimmswerken noch mehrere andere Verbindungen von geraden Linien und Kreisbogen, die auch von Zimmerleuten, Kunsttischlern und Maschinisten gebraucht werden.

Fünfter Abschnitt.

Von den gleichen, symmetrischen und ähnlichen Figuren.

Zwei Figuren sind gleich, wenn man sie auf einander legen kann, daß sie sich vollkommen einander bedecken.

Um eine Figur auf einer Ebene nachzubilden, legt man sie auf dieselbe, und schneidet entweder an der einschließenden Linie überall durch, oder man zeichnet die nachzubildende Figur mit Kreide, Kohl, Bleistift oder Tinte und bildet nur ihre Umgränzung ab. Das Nachbilden der Figuren geschieht übrigens auch durch Pauschen, Kalkiren oder Parallellinien von gleicher Länge, die aus den wichtigsten Punkten der nachzubildenden Figur gezogen werden.



Zwei Figuren abcde, a'b'c'd'e' sind **symmetrisch**, wenn alle geraden Linien aa' bb' cc' ꝛc., welche die entsprechenden Punkte verbinden, von einer zwischen beiden Figuren liegenden, geraden Linie AB senkrecht durchschnitten und halbirt werden.

Wenn eine Figur durch Kupfer, Stein, Holz, durch die Buchdruckerei, oder durch ein Siegel abgedruckt wird, so kommt eine Figur zum Vorschein, die mit ihr symmetrisch ist; man hat daher in dieser Kunst nicht die Figur, welche man nachbilden will, sondern eine mit ihr symmetrische zu verfertigen. Die Matrizen hingegen, vermittelst welcher diese Figuren hervorgebracht werden, sind in natürlicher Ordnung und müssen den nachzubildenden Figuren vollkommen gleich seyn.

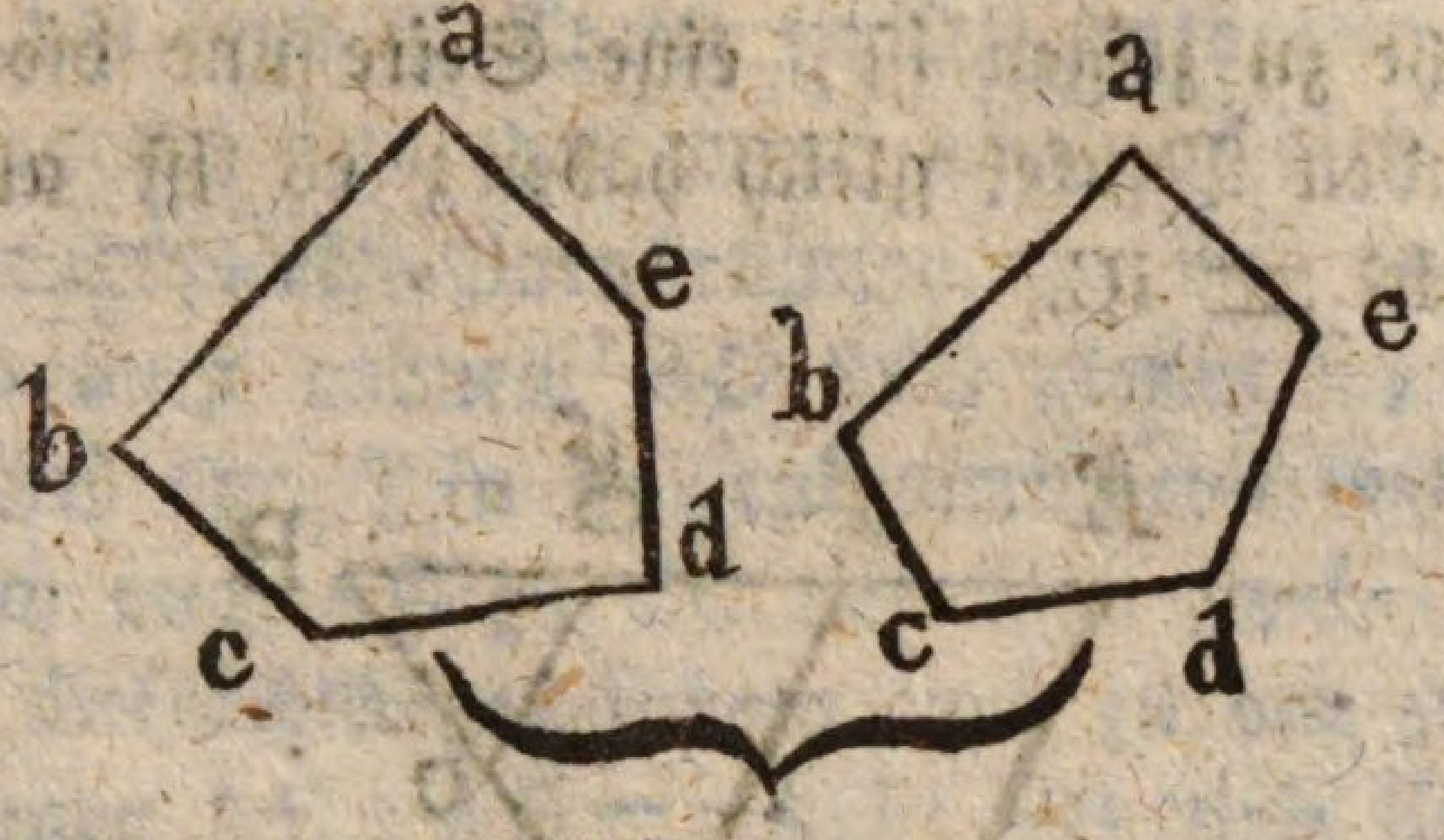
Es ist schon gezeigt worden, wie man, vermittelst gleichlaufender Linien, eine Figur bilden kann, die einer andern vollkommen gleicht. Die Geometrie giebt uns außerdem noch mehrere andere Mittel, die mehr oder weniger zu empfehlen sind.

1°) Man zerlegt ein nachzubildendes Vieleck durch Diagonallinien in Dreiecke, und bildet dann ein Viereck nach dem andern nach.

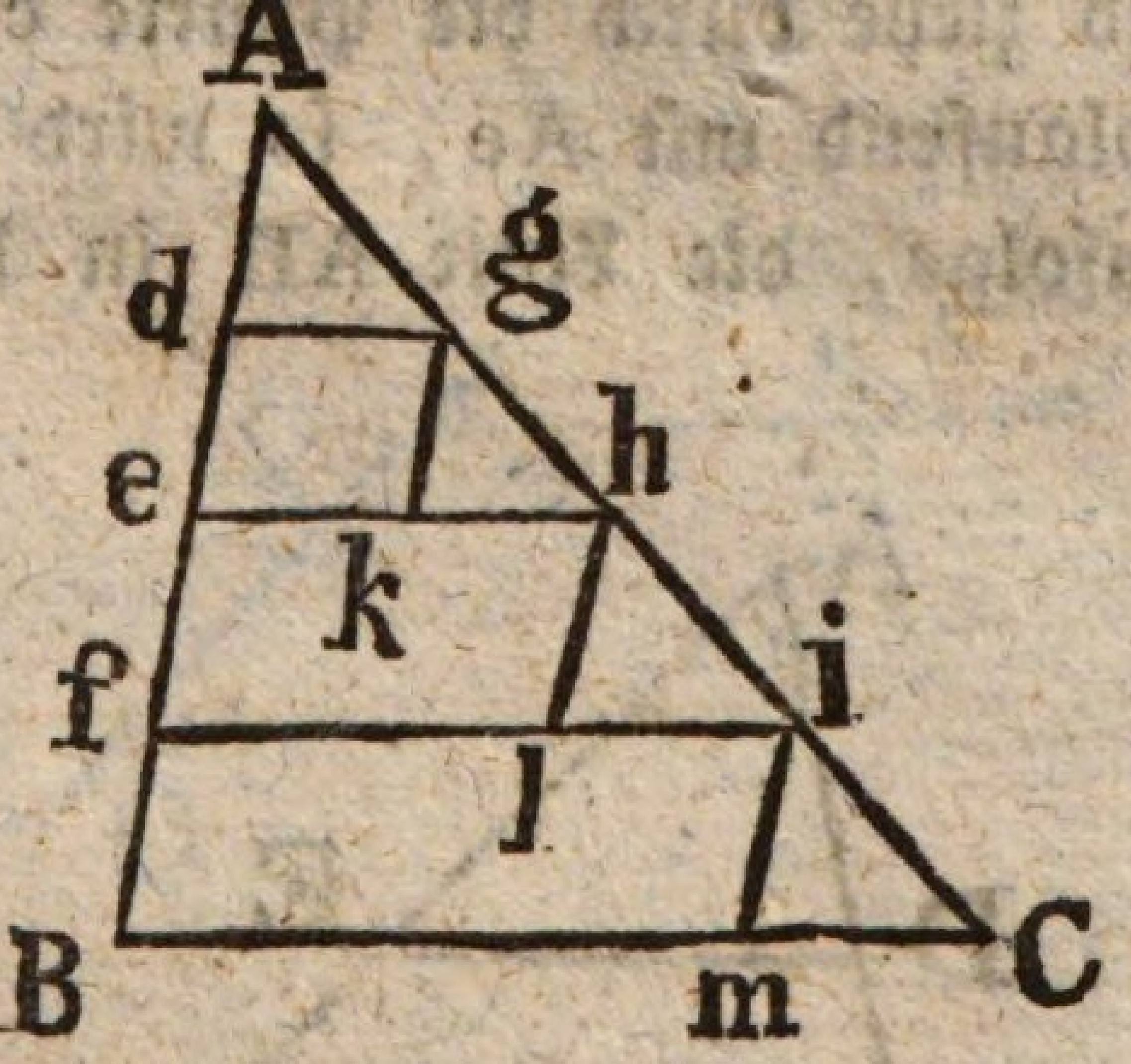
2°) Man trägt die Seiten und die mit irgend einem Meßinstrumente aufgenommenen Winkel in ihrer natürlichen Ordnung nach einander auf. Die letzte Seite nebst ihren zwei anliegenden Winkeln ergeben sich dann von selbst und bieten dadurch eine dreifache Probe für die Genauigkeit des Verfahrens dar.

3°) Man bestimmt die Lage eines jeden wichtigen Punktes der gegebenen Figur durch seine Entfernungen von zwei bestimmten Punkten oder von zwei sich durchschneidenden geraden Linien.

4°) Man beschreibt um die Figur ein Rechteck, das man in kleine, quadratmäßige Zellen zerlegt, bildet das Zellgewebe nach und bestimmt dann die Lage eines jeden wichtigen Punktes der Figur, durch die Zelle, in welcher er sich befindet.

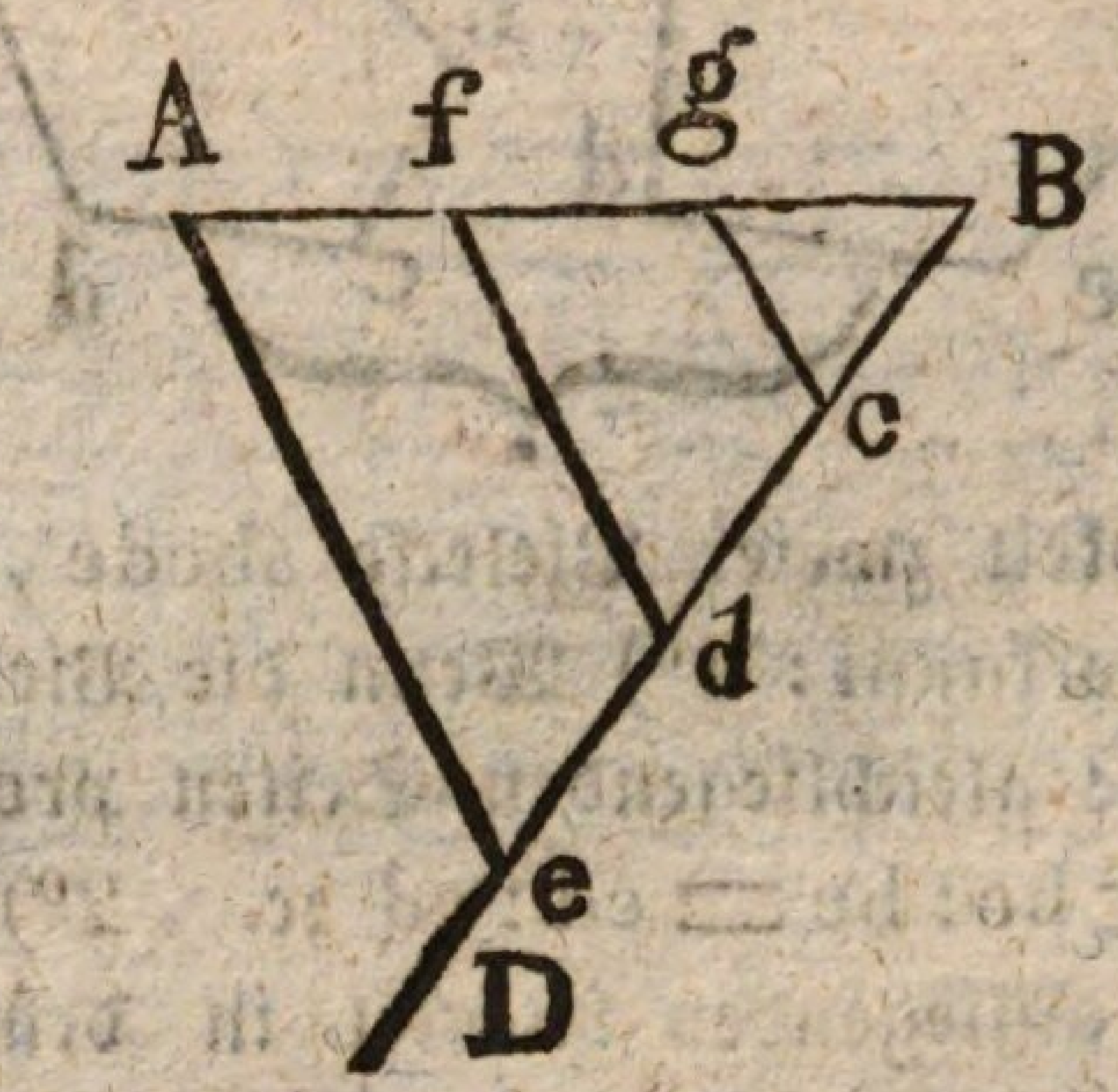


Die Aehnlichkeit zweier Vielecke abcde, abcde wird an zwei Merkmalen erkannt: 1°) Wenn die Vielecke ähnlich seyn sollen, müssen die gleichliegenden Seiten proportionirt seyn, so daß ab : ab = bc : bc = cd : cd ꝛc. 2°) Die den gleichliegenden Seiten anliegenden Winkel in dem einen Vielecke müssen den entsprechenden Winkeln in dem andern Vielecke gleichen, so daß Winkel a = Winkel a, Winkel b = Winkel b ꝛc. Es wird sich indessen durch folgende Sätze herausstellen, daß man beim Dreiecke vom Daseyn des einen dieser beiden Merkmale auf das des andern schließen kann.

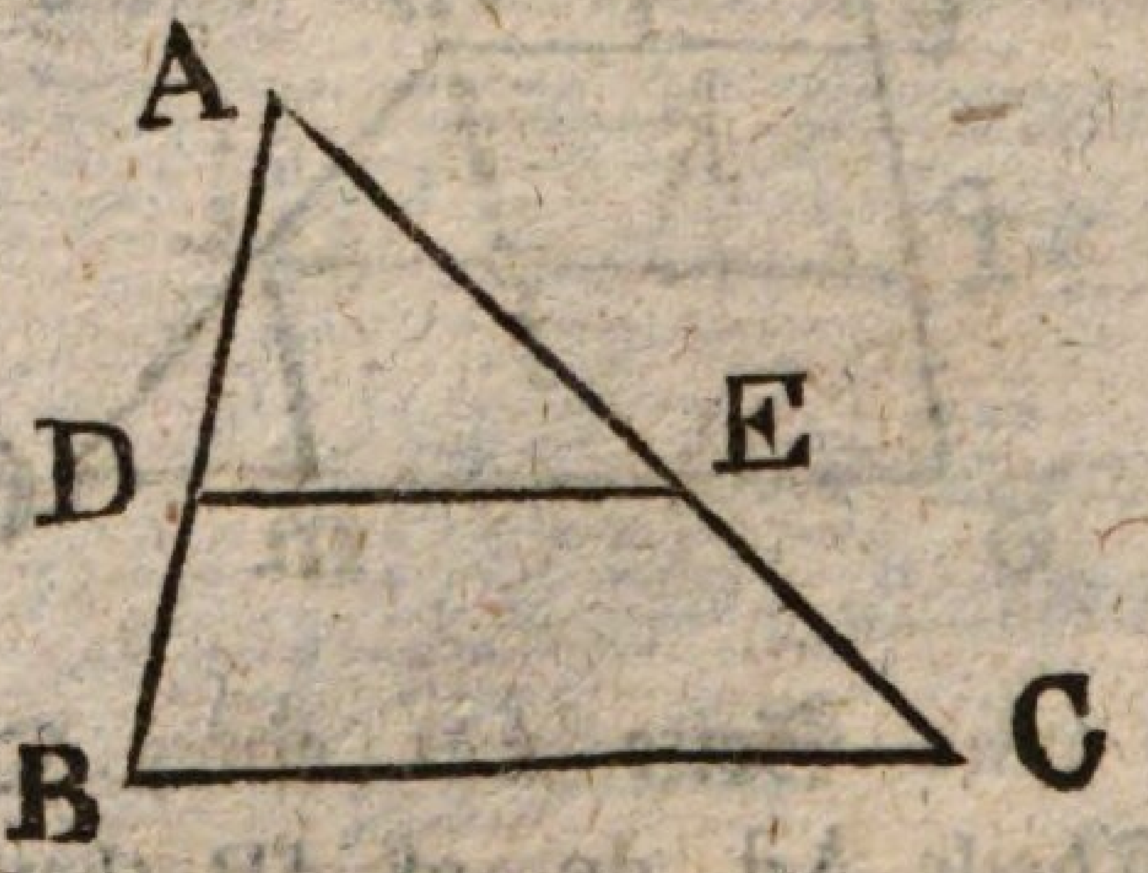


Wenn man eine Seite AB eines Dreieckes ABC in mehrere gleiche Theile Ad, de, ef, fB theilt, und durch die Theilungspunkte, die mit BC gleichlaufenden Linien dg, eh, fi zieht, so sind die Theile ag, gh, hi, iC, in welche die Seite AC zerlegt wird, ebenfalls einander gleich. Um dies zu beweisen, ziehe man durch die Punkte g, h, i die Linien gk, hl, im gleichlaufend mit AB; man erhält dadurch eine Reihe von

Dreiecken Adg, gkh, hli, imC, die alle congruent sind, indem sie, wie leicht zu zeigen ist, eine Seite und die zwei derselben anliegenden Winkel gleich haben; es ist also auch Ag = gh = hi = iC.



Um eine gegebene gerade Linie AB in mehrere, z. B. in drei gleiche Theile zu zerlegen, ziehe man durch den Endpunkt B eine andere gerade Linie BD, die mit der gegebenen einen beliebigen Winkel machen darf, trage auf dieselbe drei gleiche Theile Bc, cd, de, verbinde A und e durch eine gerade Linie und ziehe durch die Punkte c und d die Linien cg und df gleichlaufend mit Ae, so wird dadurch, dem obigen Lehrsatze zufolge, die Linie AB in drei gleiche Theile zerlegt seyn.

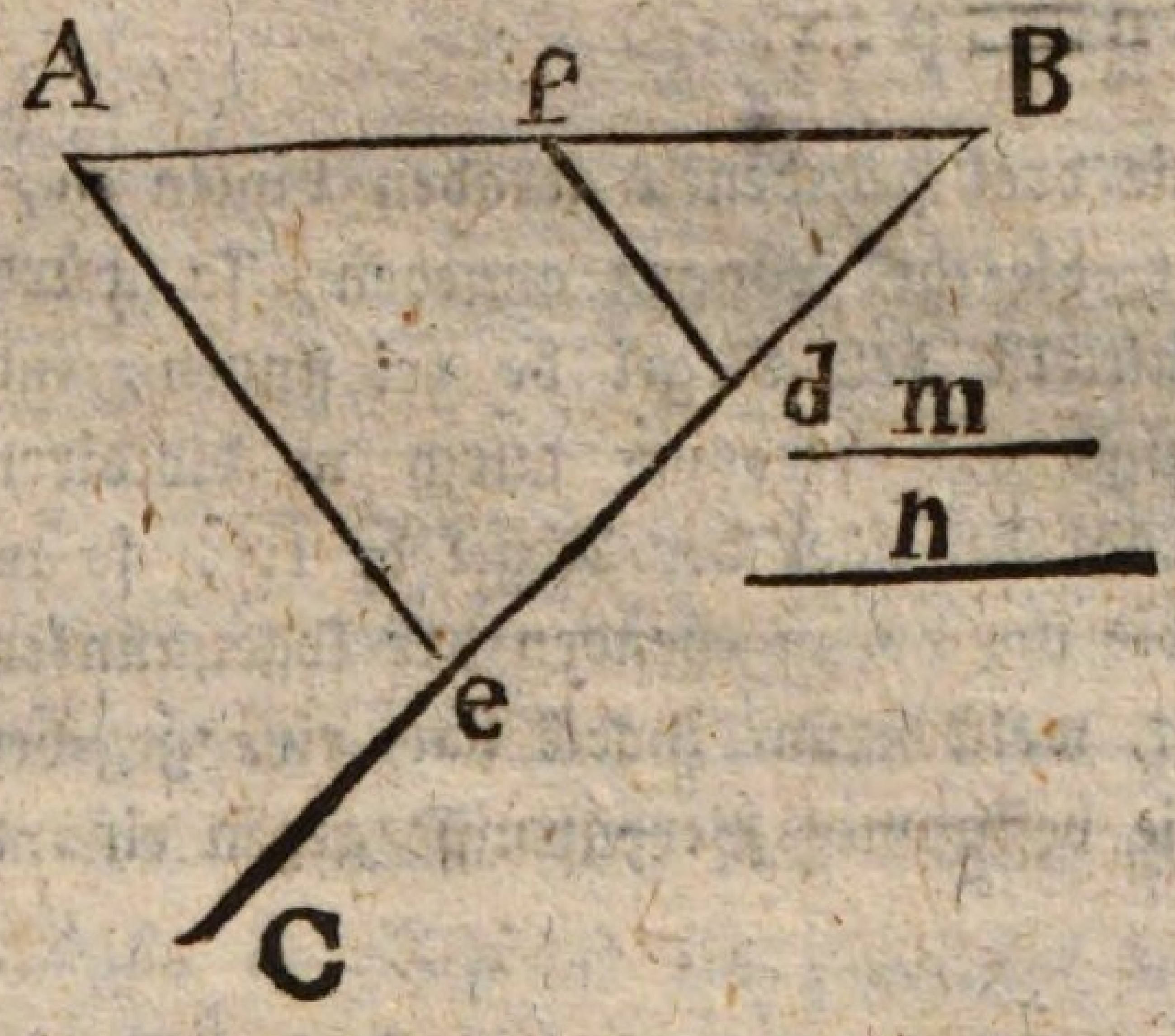


Eine gerade Linie DE, welche in einem Dreiecke ABC parallel mit einer Seite BC gezogen ist, theilt die zwei andern Seiten AB und AC in proportionirte Theile, so daß AD : DB = AE : EC. Um dies zu beweisen, wollen wir annehmen, AD verhalte sich zu DB, wie 3 zu 2, so daß,

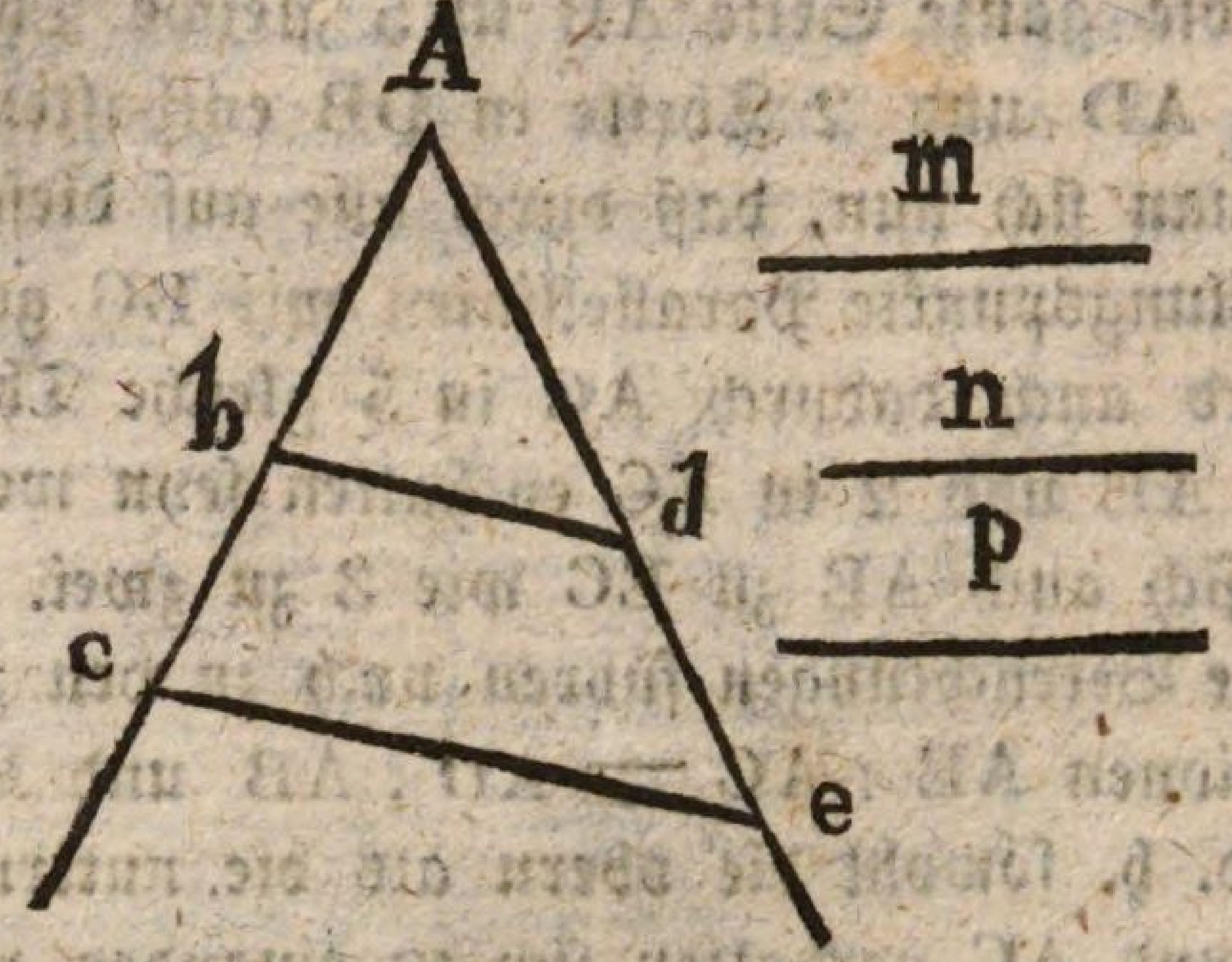
wenn man die ganze Seite AB in 5 gleiche Theile zerlegt, 3 Theile in AD und 2 Theile in DB enthalten seyn werden; denkt man sich nun, daß durch alle auf diese Weise entstehende Theilungspunkte Parallellinien mit BC gezogen werden, so wird auch dadurch AC in 5 gleiche Theile zerlegt, wovon 3 in AE und 2 in EC enthalten seyn werden; mithin verhält sich auch AE zu EC wie 3 zu zwei.

Aehnliche Betrachtungen führen noch zu den zwei folgenden Proportionen AE : AC = AD : AB und EC : AC = DB : AB; d. h. sowohl die obern als die untern Theile der Seiten AB und AC verhalten sich zu einander wie die ganzen Seiten.

Dieser Satz ist auch, wie leicht zu beweisen ist, umgekehrt wahr; wenn man nämlich weiß, daß die Seiten AB und AC durch DE in proportionirte Theile zerlegt werden, so kann man daraus schließen, daß DE parallel ist mit BC.

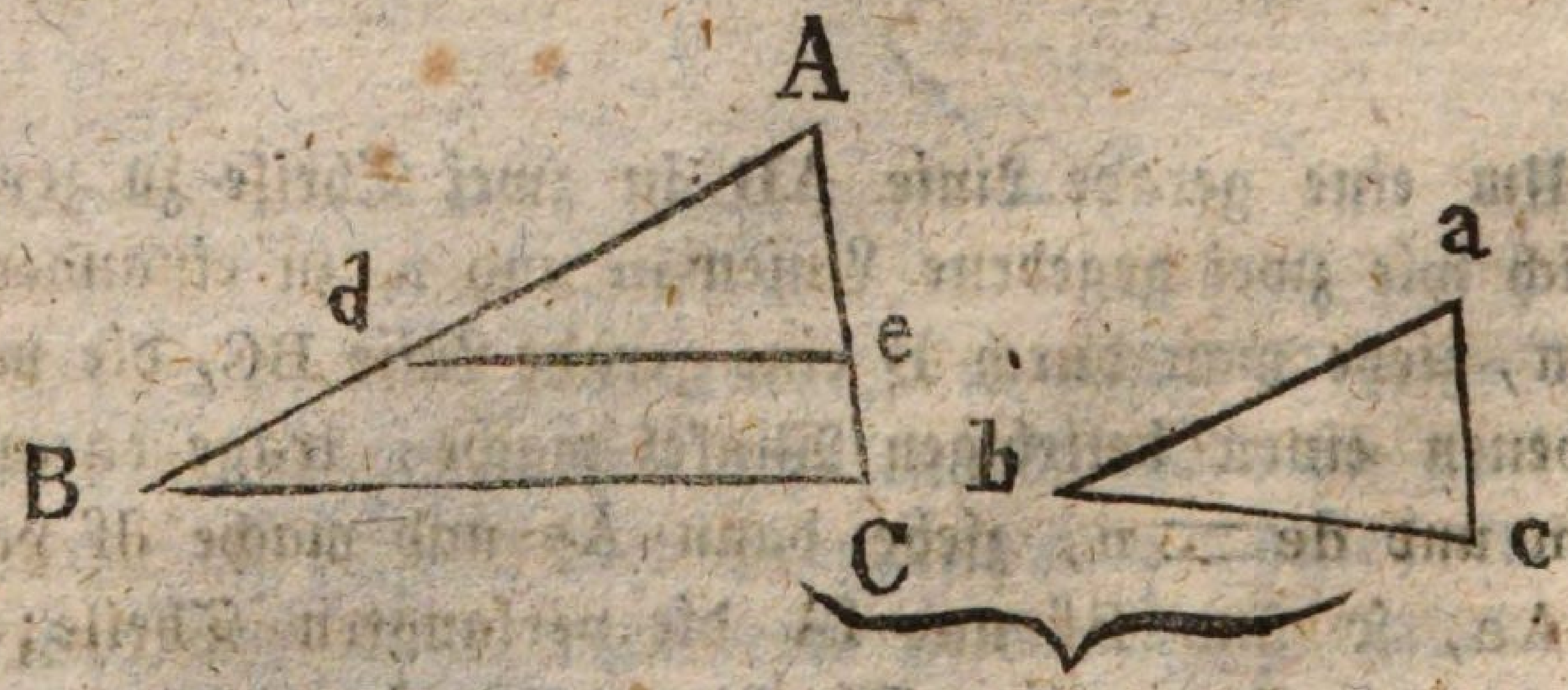


Um eine gerade Linie AB in zwei Theile zu zerlegen, die sich wie zwei gegebene Linien m und n zu einander verhalten, ziehe man durch B eine gerade Linie BC, die mit der gegebenen einen beliebigen Winkel mache, trage darauf Bd = m und de = n, ziehe dann Ae und mache df parallel mit Ae, so sind Bf und fA die verlangten Theile; denn man hat die Proportion Bf : fA = Bd : de = m : n.



Wenn drei gerade Linien m, n und p gegeben sind, und eine vierte Proportionallinie x dazu gesucht werden soll, so mache man einen Winkel A von beliebiger Größe, trage auf einen Schenkel Ab = m und bc = n, und auf den andern ad = p, ziehe dann bd und mache ce parallel mit bd, so ist de die verlangte vierte Proportionallinie x, und man hat die Proportion m : n = p : x.

Wären die drei gegebenen geraden Linien m, n, p durch Zahlen ausgedrückt, die ihre Längen angeben, so würde man die unbekannte x vermittelst der Regel de tri finden, indem man n mit p multiplizieren und das Produkt durch m dividiren würde. Obige Aufgabe entspricht demnach der Regel de tri, so wie leicht zu erkennen ist, daß die ihr vorangehenden der sogenannten Gesellschaftsrechnung entspricht, welche zum Zweck hat, eine gegebene Zahl in Theile zu zerlegen, die bestimmte Verhältnisse gegen einander haben.



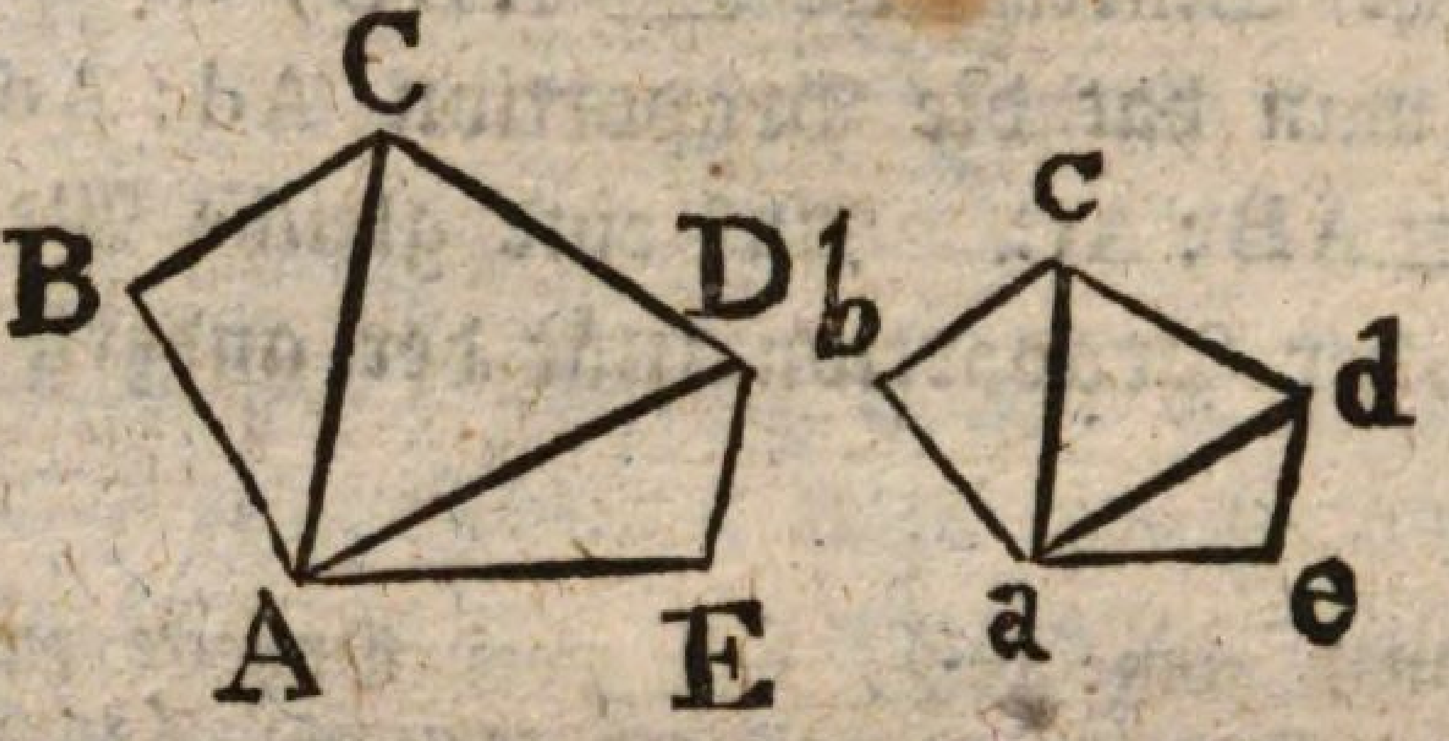
Zwei Dreiecke ABC, abc, die drei Paar gleiche Winkel haben, so daß Winkel A = Winkel a, Winkel B = Winkel b, Winkel C = Winkel c haben auch proportionirte Seiten und sind ähnlich. Um dies zu beweisen, nehme man das Dreieck abc und lege a auf A, so daß die Seiten ab und ac die Richtungen der Seiten AB und AC annehmen, welches, wegen der Gleichheit der Winkel a und A, möglich ist. Gesetzt nun, Ade sey die neue Lage des Dreieckes abc, so ist Winkel Ade = ABC, de ist also parallel mit BC und man hat die Proportion Ad : Ae = AB : AC, oder ab : ac = AB : AC. Auf eine gleiche Weise kann man sich auch von der Proportionalität der andern Seiten überzeugen.

Wenn man nun weiß, daß zwei Dreiecke zwei Paar gleiche Winkel haben, so kann man daraus schließen, daß auch das dritte Paar gleich ist, und also die Dreiecke ähnlich sind. Um daher auf einer gegebenen Linie ein Dreieck zu machen, das einem gegebenen ähnlich sey, hat man blos an die beiden Endpunkte derselben zwei Winkel anzubringen, die den Winkeln an den Endpunkten der entsprechen sollenden Linie im gegebenen Dreiecke gleichen.

Obiger Lehrsatz ist auch umgekehrt wahr. Wenn man nemlich weiß, daß zwei Dreiecke ABC, abc proportionirte Seiten haben, so kann man daraus schließen, daß auch die gleichliegenden Winkel gleich und daher die Dreiecke ähnlich sind; denn macht man Ad = ab und Ae = ac und zieht de, so sind die Seiten AB und AC durch de in proportionirte Theile zerlegt, folglich ist de parallel mit BC, Winkel Ade = Winkel ABC und die Dreiecke ABC, Ade sind ähnlich. Es bleibt nun nur noch zu beweisen, daß die zwei Dreiecke abc, Ade conguent sind, und da man schon weiß, daß sie 2 Paar gleiche Seiten haben, so hat man nur noch zu beweisen, daß auch das dritte Seitenpaar de und bc gleich ist; dies folgt aber daraus, daß jede dieser beiden Seiten eine vierte Proportionallinie für AB, ab und BC ist.

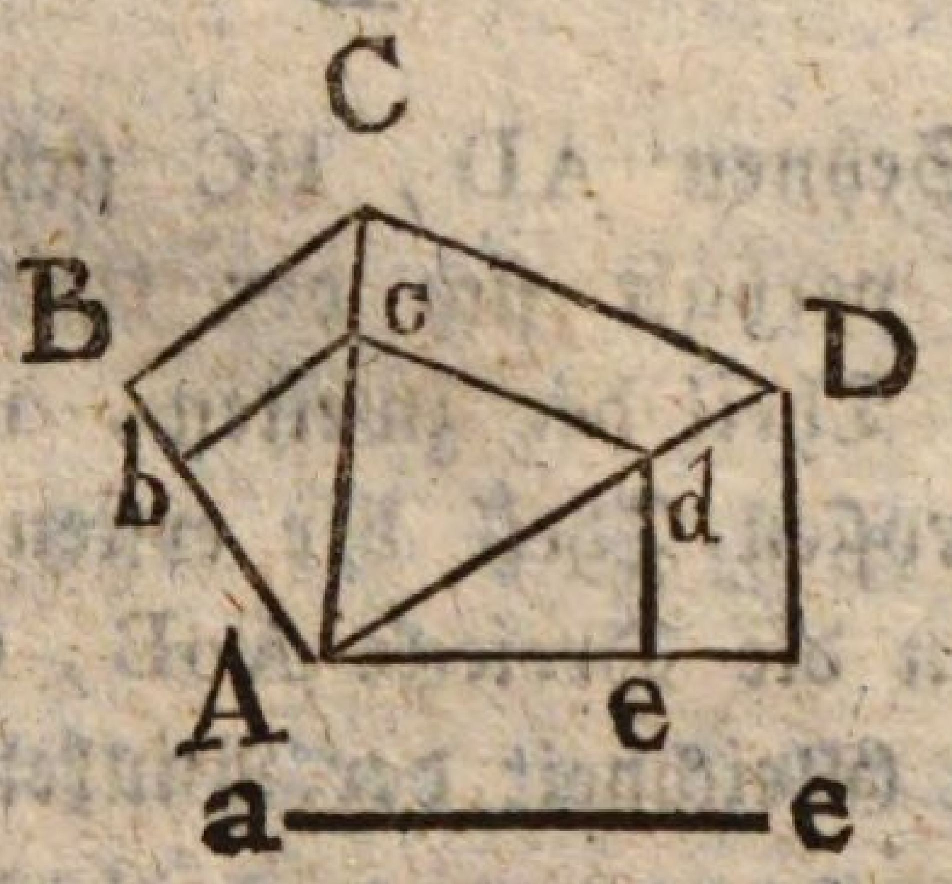
Zwei Dreiecke ABC, abc sind ferner ähnlich, wenn sie zwei Paar proportionirte Seiten haben, die ein Paar gleiche

Winkel einschließen; wenn nemlich AB : ab = AC : ac und Winkel A = Winkel a. Um dies zu beweisen, lege man das Dreieck abc auf das Dreieck ABC, so daß die Winkel a und A einander decken; die Seite bc wird dann in ihrer neuen Lage de die Seiten AB und AC in proportionirte Theile zerlegen und daher mit BC parallel seyn; die zwei Dreiecke haben also drei Paar gleiche Winkel und sind ähnlich.



Zwei ähnliche Vielecke ABCDE, abcde lassen sich vermittelst der Diagonallinien, die aus zwei gleichliegenden Punkten A und a gezogen werden, in solche Dreiecke zerlegen, daß jedes Dreieck in dem einen dem gleichliegenden Dreiecke in dem andern ähnlich ist. Daß die Dreiecke AED, aed ähnlich sind, gründet sich auf den vorigen Satz; denn diese Dreiecke haben, vermöge der Aehnlichkeit der Vielecke zwei Paar proportionirte Seiten AE : ae = ED : ed, die ein Paar gleiche Winkel E und e einschließen. Aus der Aehnlichkeit dieser zwei Dreiecke folgt die Proportion CD : cd = DA : da; die zwei Dreiecke CDA, cda haben also ebenfalls zwei Paar proportionirte Seiten, und da ferner Winkel CDE = Winkel cde und Winkel ADE = Winkel ade, so ist auch Winkel CDA = Winkel cda; folglich sind die von jenen proportionirten Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich, und die Dreiecke CDA, cda sind ähnlich. Die Dreiecke ABC, abc sind aus demselben Grunde ähnlich als die Dreiecke AED, aed. Gegenwärtiger Beweis läßt sich übrigens anwenden, so groß auch die Seitenzahl der gegebenen Vielecke seyn möge.

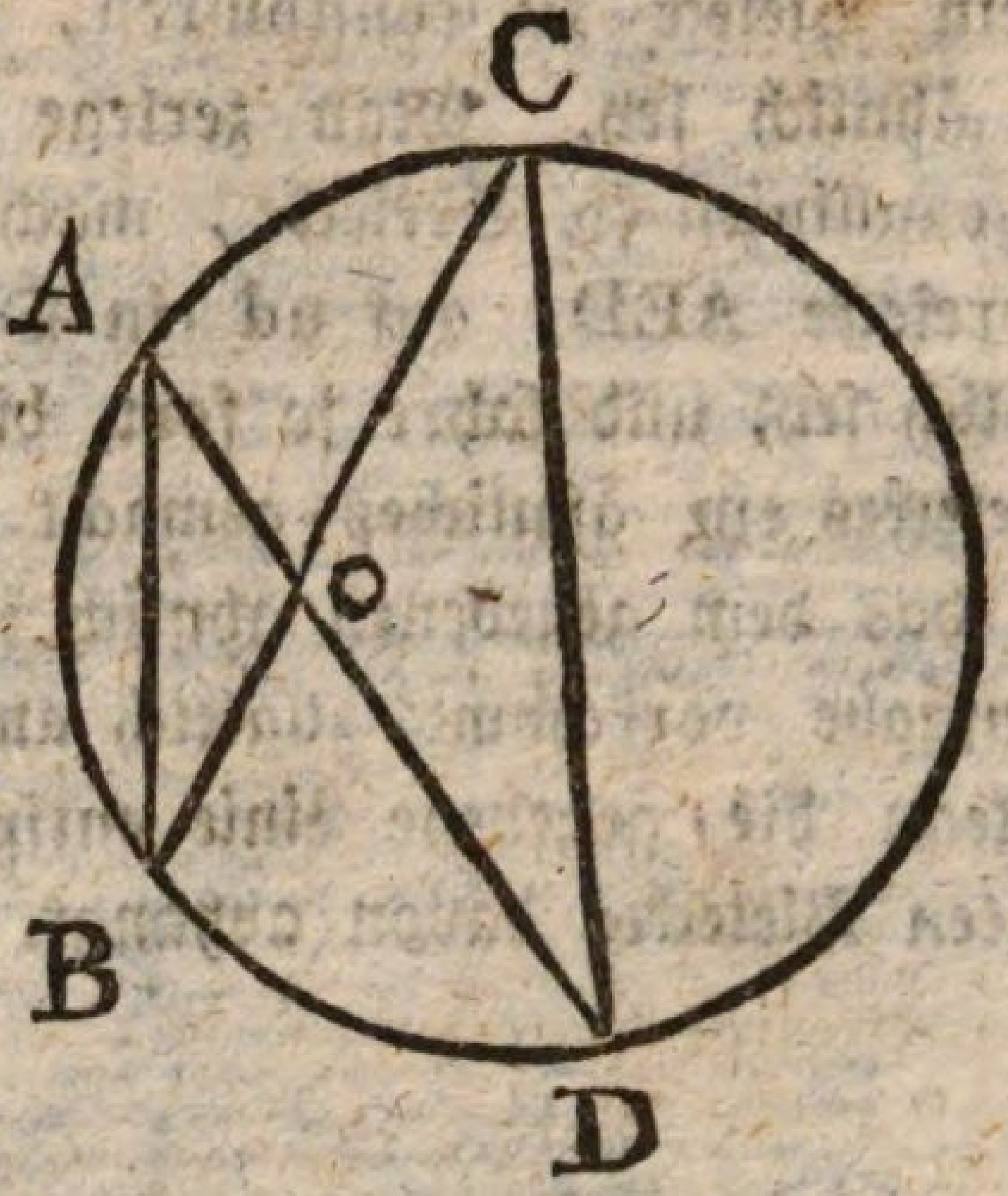
Der hier erwiesene Satz giebt ein Mittel, auf eine gegebene gerade Linie ae ein Vieleck zu constouiren, das einem gegebenen Vielecke ABCDE ähnlich sey. Man zerlege nämlich das gegebene Vieleck durch Diagonallinien in Dreiecke, mache auf ae ein Dreieck aed, das dem Dreiecke AED, auf ad ein Dreieck acd, das dem Dreiecke ACD ähnlich sey, und fahre so fort, bis man jedem Dreiecke des gegebenen Vieleckes ein ähnliches gemacht hat, so erhält man ein Vieleck abcde, das dem gegebenen ähnlich ist. Man muß übrigens, wo diese Aufgabe vorkommt, zugleich angeben, welcher Seite im gegebenen Vielecke die gegebene Linie entsprechen soll, weil die Größe des verlangten Vieleckes davon abhängt.



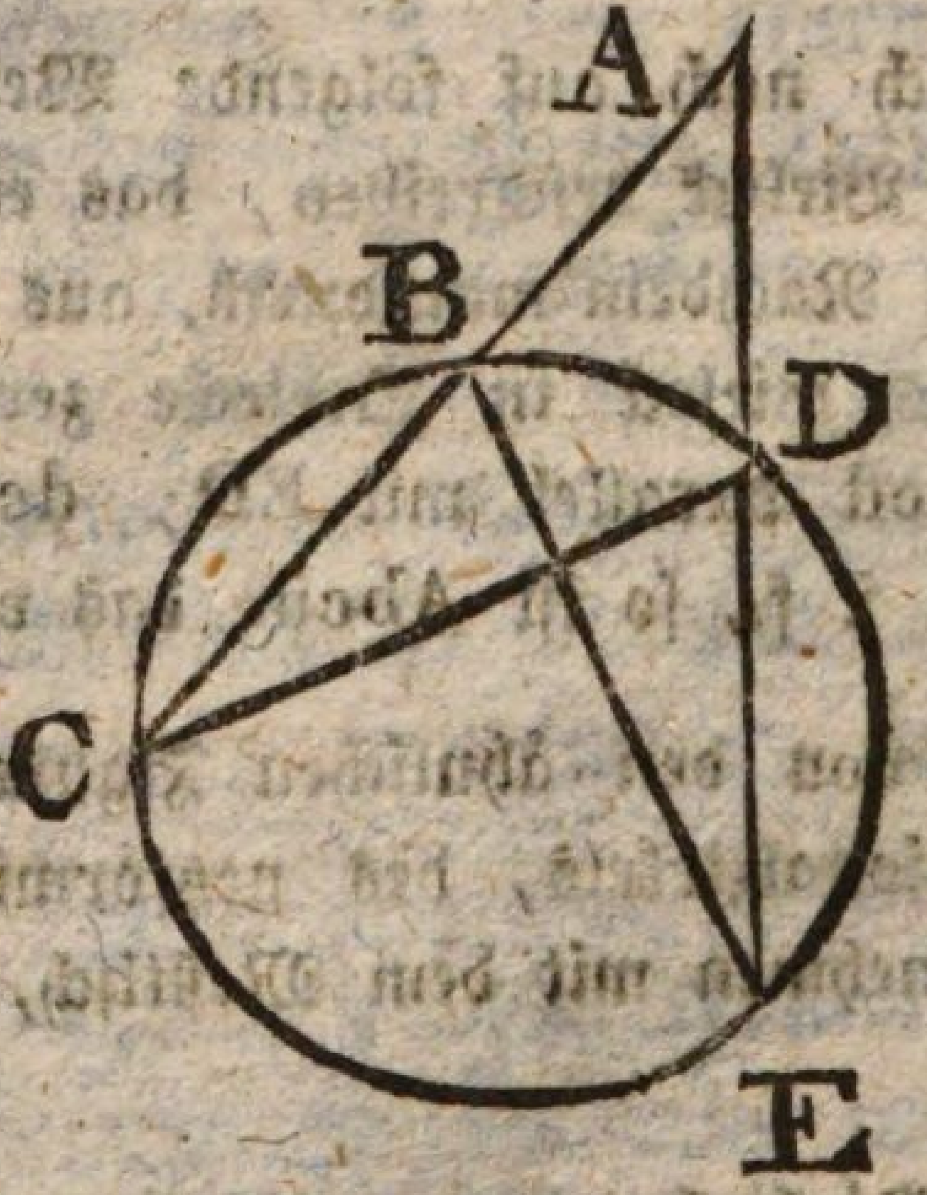
Man kann auch noch auf folgende Weise auf eine gegebene gerade Linie ae ein Vieleck beschreiben, das einem gegebenen Vielecke ABCDE ähnlich ist. Nachdem man durch, aus dem Punkte A gezogene Diagonallinien dieses Vieleck in Dreiecke zerlegt hat, mache man Ae = ae, ziehe ed parallel mit ED, dc parallel mit DC, cb parallel mit CB u. s. f., so ist Abcde das verlangte Vieleck.

Auf die Lehre von den ähnlichen Figuren gründet sich der Gebrauch des Proportionalzirkels, des netzförmigen verjüngten Maaßstabes und das Aufnehmen mit dem Meßtisch, oder mit dem Graphometer.

Zwei reguläre Vielecke von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich, denn da alle Seiten in jedem der beiden Vielecke einander gleichen, so hat jede Seite in dem einen dasselbe Verhältniß zu der entsprechenden Seite in dem andern; die Winkel der beiden Vielecke sind ebenfalls einander gleich, da ihre Größe von der Seitenzahl der Vielecke abhängt.



Wenn zwei Sehnen AD, BC sich in einem Punkt o durchschneiden, so verhält sich der kleine Theil der ersten Sehne zum kleinen Theil der zweiten, wie der große Theil der zweiten zum großen Theil der ersten, so daß Ao : Bo = Co : Do; denn die Dreiecke AoB, CoD, sind einander ähnlich wegen der Gleichheit der Winkel A und C, B und D. (s. S. 34).



Wenn zwei Sehnen BC, DE sich außerhalb der Kreislinie in einem Punkte A durchschneiden, so hat man die Proportion AB : AD = AE : AC. Dieser Satz gründet sich darauf, daß die zwei Dreiecke ACD, AEB, wegen des gemeinschaftlichen Winkels A und der gleichen Winkel C und E einander ähnlich sind. Um übrigens sowohl hier, als in

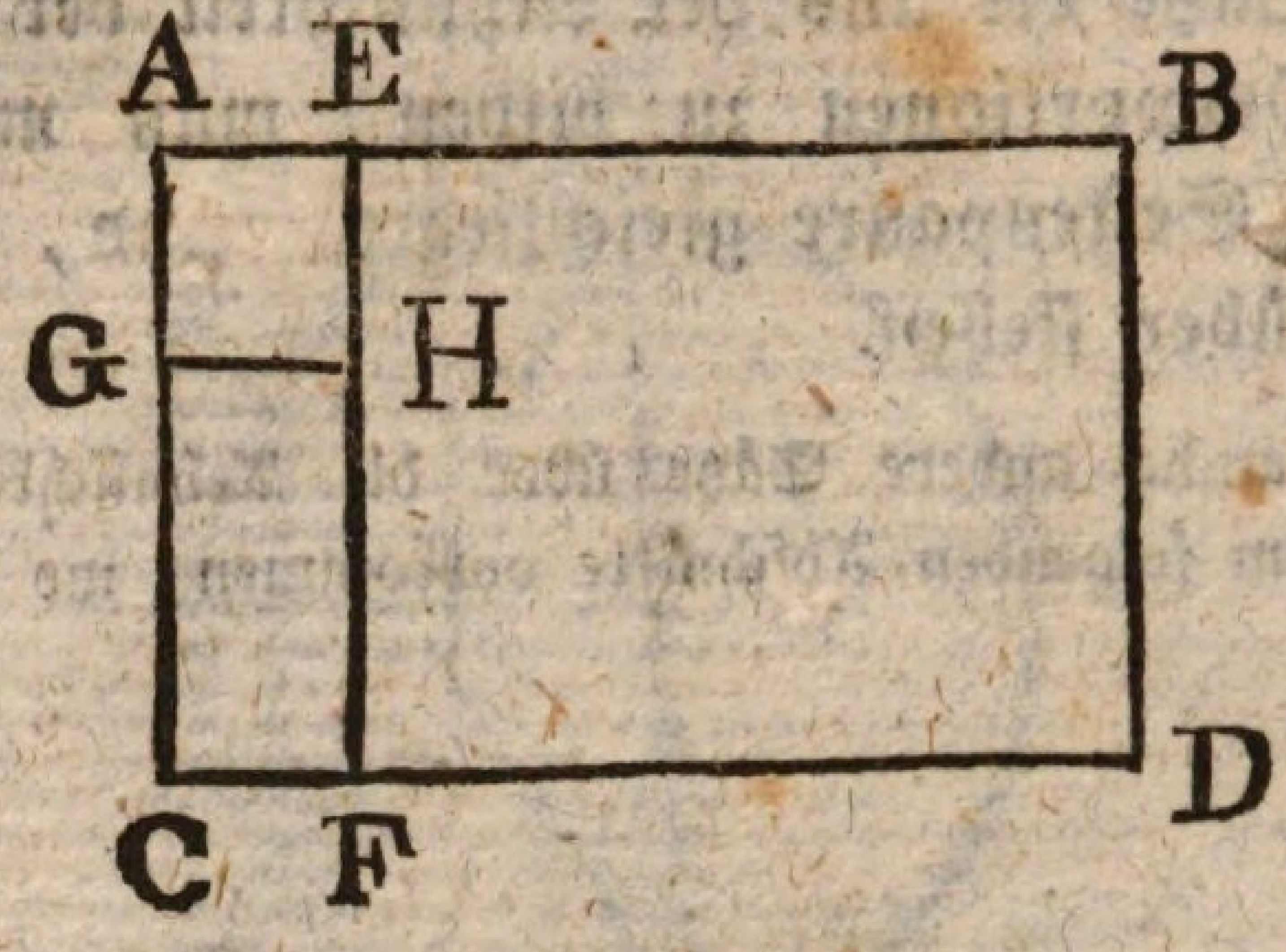
dem vorigen Satze die aus der Aehnlichkeit der Dreiecke hervorgehenden Proportionen zu bilden, muß man erst aufsuchen, welche Seitenpaare gleichliegend sind, oder gleichen Winkeln gegenüber stehen.

Noch manche andere Sätze über die Aehnlichkeit der Dreiecke werden in dem folgenden Abschnitte vorkommen, wo sie ihre Anwendung finden.

Sechster Abschnitt.

Vom Flächeninhalte der auf Ebenen gezeichneten Figuren, welche von geraden Linien oder von Kreislinien eingeschlossen sind.

Um den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, muß man suchen, wie viel mal eine andere Fläche von bestimmter Größe und bestimmter Gestalt, die man zur Maaßeinheit gewählt, in ihr enthalten sey. Was die Gestalt der Maaßeinheit betrifft, so hat man allgemein das Quadrat dazu genommen, weil es die einfachste unter den Figuren ist, mit denen man, ohne Zwischenräume zu lassen, einen Platz bedecken kann. Die Seite des Quadrates hingegen, dessen man sich zur Bestimmung des Flächeninhaltes bedient, ist immer die Einheit des Längenmaaßes; wenn man z. B. zur Ausmessung der Längen den Schuh gebraucht, so ist die Einheit des Flächenmaaßes der Quadratschuh, oder ein Quadrat, dessen Seite ein Schuh ist.



Der Flächeninhalt eines Rechteckes ABCD wird gefunden, wenn man die Zahlen, welche ausdrücken, wie vielmal die Längeneinhalt in der Grundlinie CD und in der Höhe AC enthalten ist, mit einander multiplizirt. Wenn z. B. die Grundlinie CD = 5′ und die Höhe AC = 3′, so ist der Flächeninhalt = 35 □′. Um dies zu beweisen, mache man AE = CF = 1′ und ziehe EF, so ist das Rechteck ABCD fünfmal so groß, als der Streife AECF; macht man ferner AG = EH = 1′ und zieht GH, so ist der Streife AECF dreimal so groß als AEGH; AEGH aber ist ein □′, AEGF enthält also 3 □′ und das ganze Rechteck ABCD, welches fünfmal so groß als AEGF ist, enthält 15 □′.

Ein Quadratfuß im Duodezimalmaaß ist als ein Rechteck zu betrachten, das 12″ in der Grundlinie und 12″ in der Höhe hat, und enthält demnach 144 □″. So enthält auch der Quadratzoll 64 oder 144 □‴. Im Dezimalmaaß enthält ein Quadratfuß 100 □″, und ein Quadratzoll 100 □‴.

Das Verhältniß zweier Einheiten für das Flächenmaaß wird gefunden, wenn man die Zahlen, welche das Verhältniß der entsprechenden Längeneinheiten ausdrücken, mit sich selbst multiplizirt; so verhält sich z. B. die deutsche Quadratmeile zu der französischen = 25 : 9, weil sich die deutsche Meile zu der französischen = 5 : 3 verhält.

Zur genauern Bestimmung der Längeneinheiten der verschiedenen Orten giebt man ihr Verhältniß zum Pariser Schuh (pied du roi) an. Denkt man sich den Pariser Schuh in 14400 gleiche Theile eingetheilt, so findet man durch folgende Tabelle, wie viele solche Theile der Schuh in den größern Städten Europas enthält.

Augsburg	13129,	Basel	13260,	Berlin	13730,
Anspach	12570,	Baiern	12938,	Bern	13150,
Braunschweig	12650,	Bremen	12820,	Breslau	12600,
Brüssel	12900,	Calenberg	12953,	Cöln	12190,
Danzig	12715,	Erfurt,	12510,	Frankfurt	12700,
Gießen	13200,	Halle	13200,	Hamburg	12700,
Hannover	12953,	Heidelberg	12275,	Hildesheim	12445,
Holstein	13376,	Königsberg	13640,	Leipzig	12520,
London	12513,	Lübeck	12870,	Mainz	13913,
Mannheim	12865,	Meklenburg	12890,	München	12825,
Nürnberg	13467,	Osnabrück	12375,	Prag	13360,
Ulm	12953,	Wien	14012,	Würtemberg	12780,
Zürich	13300.				

Die Einheit für das Längenmaaß in Frankreich ist der Meter zu 10 Dezimeter zu 10 Centimeter; seine Verhältnißzahl zum pariser Schuh ist 44329. Der Umfang des Aequators ist 40,000,000 Meter.

Der Flächeninhalt der Grundstücke wird angegeben in Morgen, welche in Quadratruthen eingetheilt sind. In Frankfurt hat ein Morgen 160 Quadratruthen und eine Feldruthe (so viel als $^4/_5$ Waldruthen) hat $12^1/_2$ Schuh.

Wenn der Flächeninhalt und die Grundlinie eines Rechteckes gegeben sind, so findet man die Höhe, wenn man den Flächeninhalt durch die Grundlinie dividirt. Auf gleiche Weise findet man die Grundlinie, wenn der Flächeninhalt und die Höhe gegeben sind.

Der Flächeninhalt eines Quadrates wird natürlich gefunden, wenn man die Seite mit sich selbst multiplizirt. Wenn der Flächeninhalt gegeben ist, so findet man die Seite indem man aus der Zahl, welche den Flächeninhalt ausdrückt, die Quadratwurzel zieht.

Wie viel frankfurter Schuh enthalten 324 cölnische Schuh?

Wie viel Meter sind 845 frankfurter Schuh?

Wie viel frankfurter □' sind 680 hamburger □'?

Wie viel Quadratmeter sind 456 frankfurter □'?

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechteckes, dessen Grundlinie 5' 8'', und dessen Höhe 3' 5'' im Dezimalmaaß hat?

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechteckes, dessen Grundlinie 7' 9'', und dessen Höhe 5' 7'' im Duodezimalmaaß hat?

Wie viel Morgen hat ein Feld in der Gestalt eines Rechteckes, dessen Grundlinie 1260′, und dessen Höhe 845′ hat?

Wie viel Quadratfuß hat ein Hof, der 65 Schritte in der Länge und 34 Schritte in der Breite hat, wenn auf 5 Schritte 12 Schuh gerechnet werden?

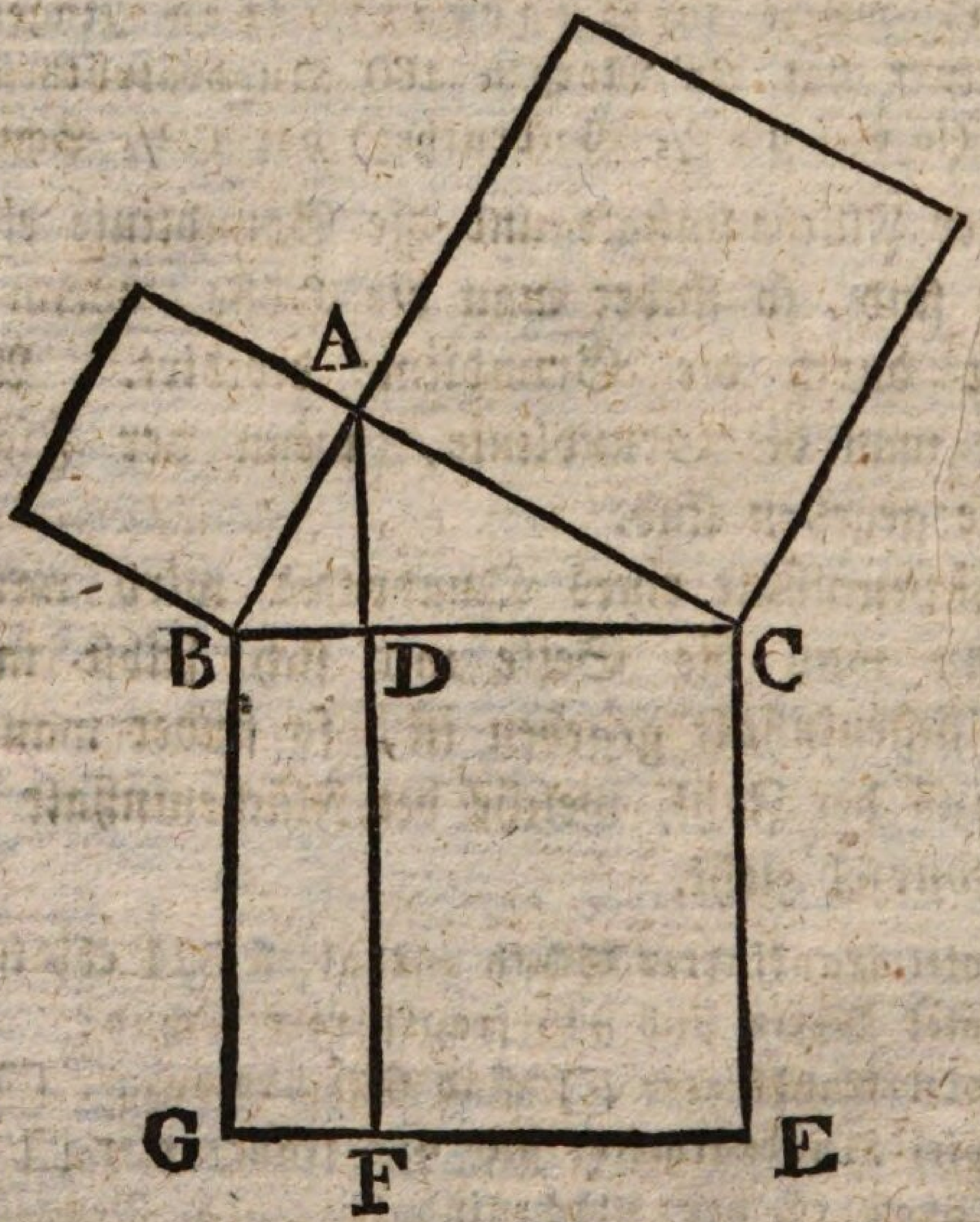
Wie viel Quadratfuß Brett ist an einem Kasten, der 5′ 4″ in der Länge, 2′ 8″ in der Breite und 3′ 4″ in der Höhe hat?

Wie viel Steinplatten braucht man, um einen Platz zu pflastern, der 25′ in der Länge und 18′ in der Breite hat, wenn jeder Stein 1′ 2″ in der Länge und eben so viel in der Breite hat?

Es soll ein Boden angelegt werden, der 2800 □′ habe, und dessen Länge sich zu seiner Breite = 9 : 7 verhalte. Wie lang und wie breit wird dieser Boden werden?

Wie groß ist die Höhe eines Rechteckes, dessen Flächeninhalt 248 □′ 96□″ und dessen Grundlinie 15′ 12″ hat?

Wie groß ist die Seite eines Quadrats, das einen Flächeninhalt von 675 □′ hat?



Wenn man sowohl auf die 2 Katheten als auf die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreieckes ABC Quadraten er-

richtet, so wird das Quadrat auf der Hypotenuse genau so groß seyn als die Quadraten auf den 2 Katheten zusammen. Um dies zu beweisen, fälle man aus A ein Perpendikel AD auf die Hypotenuse und verlängere bis in F wodurch das Quadrat BCGE in zwei Rechtecke CDEF, BDGF zerlegt wird. Das Dreieck ACD ist dem Dreiecke ABC ähnlich; denn W. ADC = W. BAC als rechte Winkel, und W. ACB ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich; man erhält dadurch die Proportion DC : AC = AC : BC, und da in einer geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder dem Producte der mittlern gleicht, so ist DC × BC = AC × AC, oder auch DC × CE = AC × AC; d. h. das Quadrat auf der Kathete AC ist so groß als das Rechteck CDEF; auf eine gleiche Weise läßt sich zeigen, daß das Quadrat auf der Kathete AB so groß ist als das Rechteck BDGF; die Quadraten auf den zwei Katheten zusammen sind also so groß, als jene zwei Rechtecke zusammen, d. h. sie sind zusammen so groß als das Quadrat auf der Hypothenuse.

Wenn die zwei Katheten eines rechtwinklichen Dreieckes gegeben sind, so findet man die Hypotenuse, wenn man jede Kathete mit sich selbst multiplizirt, die zwei Quadraten addirt und aus der Summe die Quadratwurzel zieht.

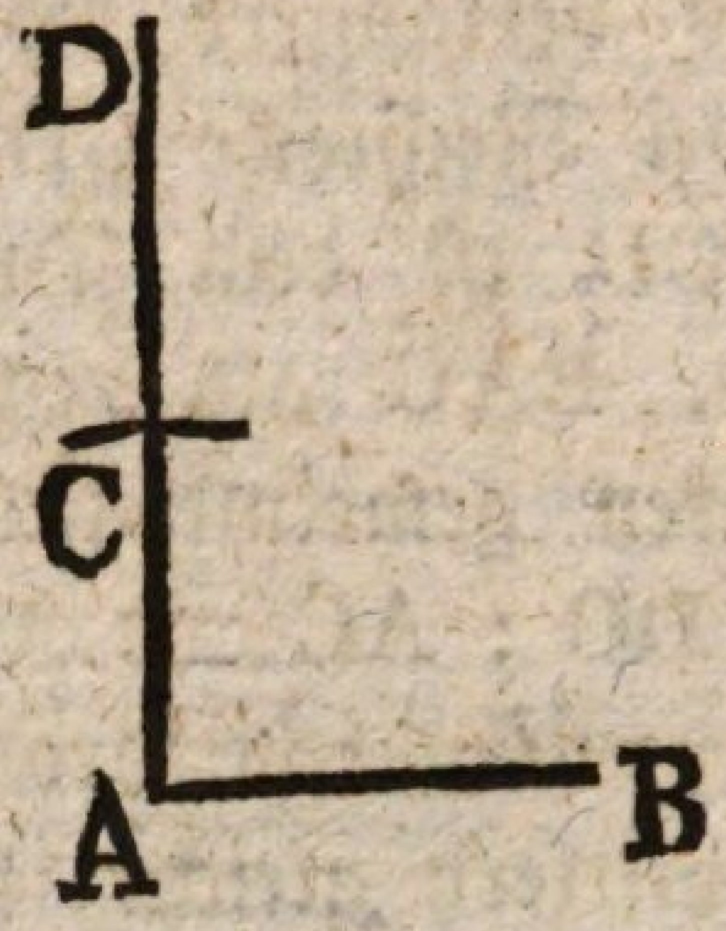
Wie groß ist nach dieser Regel die Hypotenuse für folgende Kathetenpaare: 3—4, 5—12, 15—18, 20—21, 11—60, 63—16?

Wenn die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind, so findet man die andere Kathete, wenn man das Quadrat der gegebenen vom Quadrate der Hypotenuse abzieht und aus dem Rest die Quadratwurzel nimmt.

Wie groß ist eine Kathete, wenn für die Hypotenuse und die andere Kathete folgende Zahlen gegeben sind: 58—40 89—39, 130—112, 194—144, 3551—3649?

Um ein Quadrat zu machen, das so groß sey, als zwei gegebene Quadraten zusammen, nehme man die Seiten der zwei gegebenen Quadraten zu Katheten eines rechtwinklichen Dreieckes; die entsprechende Hypotenuse ist alsdann die Seite des verlangten Quadrates. Sind mehr als zwei Quadraten gegeben, so kann man durch diese Construction ihre Anzahl um

eins vermindern, und durch fortgesetzte Verminderung erhält man endlich ein Quadrat, das so groß ist, als alle gegebene zusammen.



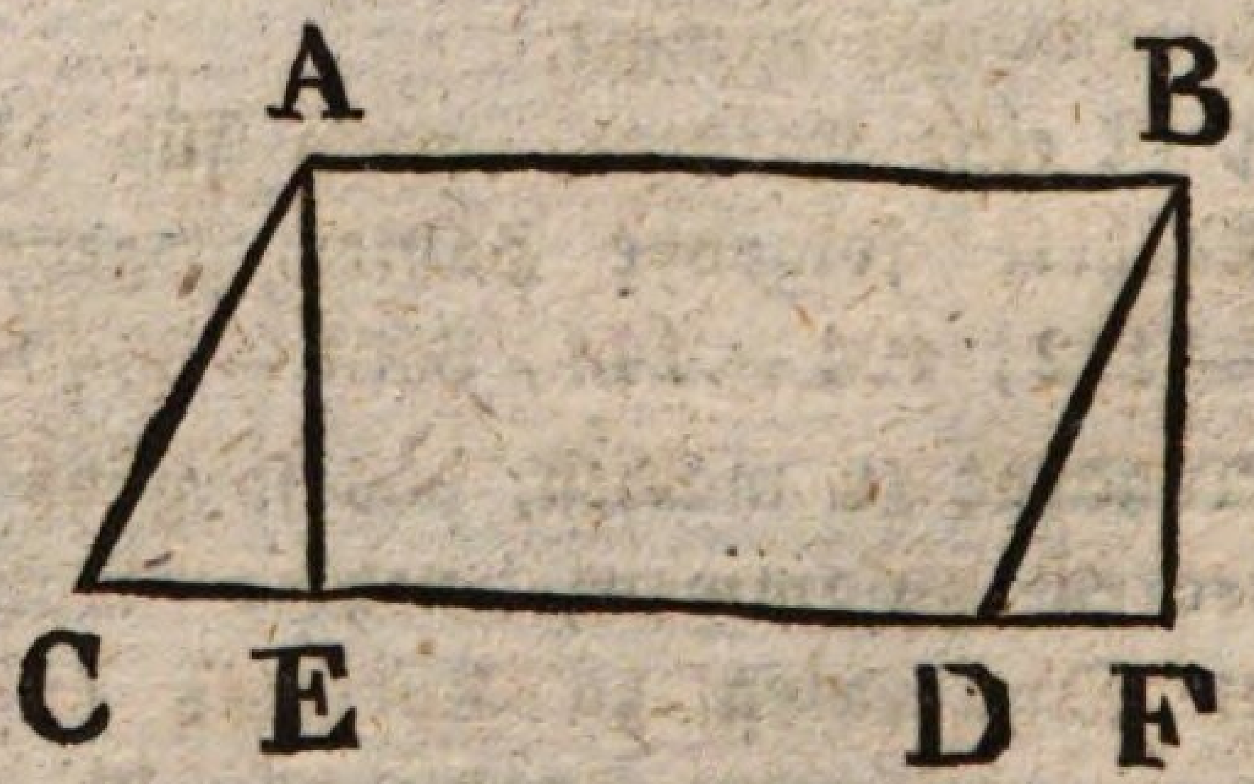
Um ein Quadrat zu machen, das so groß sey, als die Differenz zweier gegebenen Quadraten, mache man eine Linie AB so groß, als die Seite des kleinsten Quadrates, erhebe über A eine Senkrechte AD von unbestimmter Länge und beschreibe aus B mit der Seite des größten Quadrates einen Bogen, der AD in einem Punkte C durchschneidet, so ist AC die Seite des verlangten Quadrates.

Die Diagonallinie eines Quadrates ist als die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreieckes zu betrachten, dessen beide Katheten der Seite des Quadrates gleichen; um also die Länge der Diagonallinie zu finden, muß man den Flächeninhalt des Quadrates doppelt nehmen und dann die Quadratwurzel ziehen.

Wie groß ist die Diagonallinie, wenn die Seite des Quadrates 5′ 8″ hat?

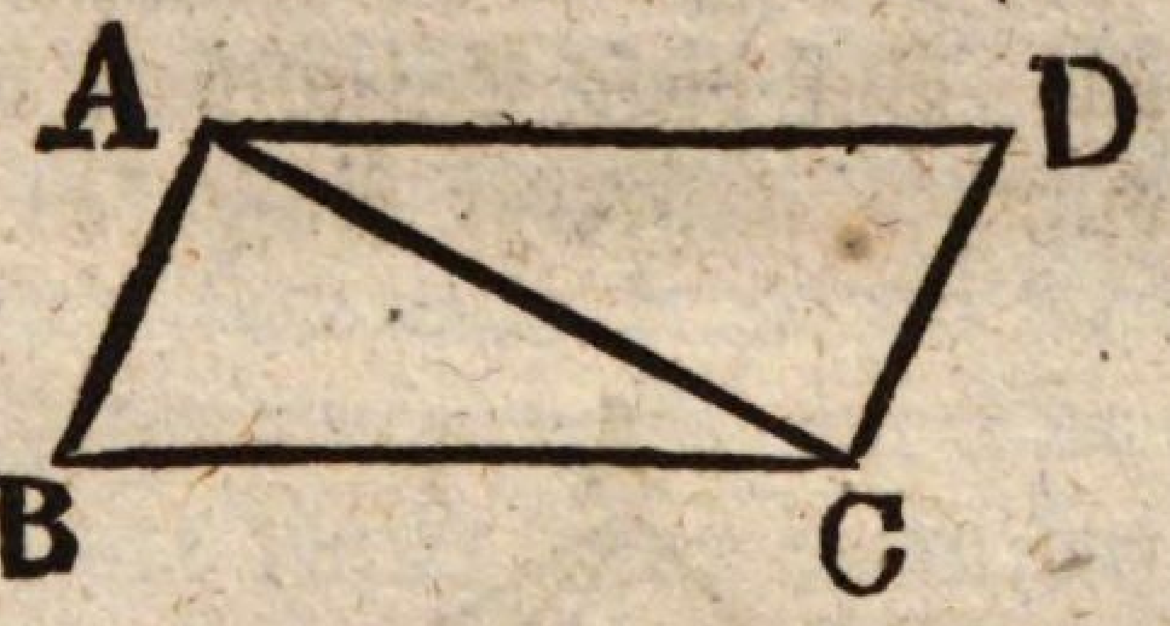
Wie groß ist die Seite des Quadrates, wenn die Diagonallinie 9′ 5″ hat?

Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes, wenn jede Seite 11′ 9″ hat?



Ein Parallelogramm ABCD kann in ein Rechteck verwandelt werden, das dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe

hat. Um dies zu Stande zu bringen, hat man nur von A und B auf die Grundlinie oder ihre Verlängerung die zwei Perpendikel AE und BF fallen zu lassen, und man erhält dadurch ein Rechteck AEBF, welches, wie leicht zu erkennen ist, gleiche Grundlinie und gleiche Höhe mit dem gegebenen Parallelogramm hat und demselben an Flächeninhalt gleicht; denn das Dreieck ACE, welches vom Parallelogramm wegfällt, ist durch das ihm gleiche Dreieck BDF ersetzt. Es folgt hieraus, daß auch der Flächeninhalt eines Parallelogramms gefunden wird, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt.



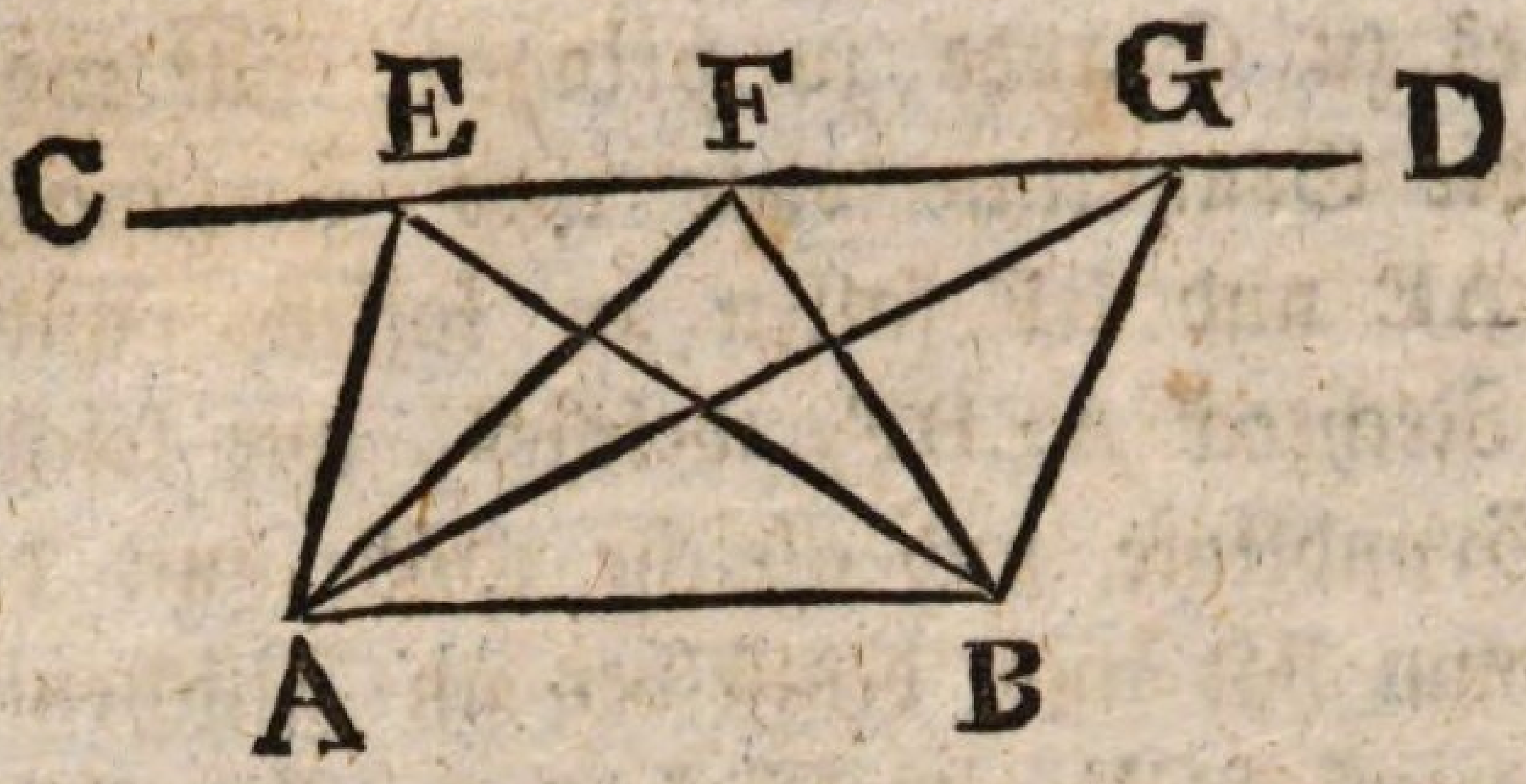
Jedes Dreieck ABC ist die Hälfte von einem Parallelogramm ABCD, welches gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Man findet also den Flächeninhalt eines Dreieckes, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt und das Produkt halbirt. Ist der Flächeninhalt und die Grundlinie oder die Höhe gegeben, so findet man das Unbekannte; wenn man den doppelten Flächeninhalt durch die Grundlinie oder die Höhe dividirt.

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreieckes, wenn die Grundlinie 9′ 11″ und die Höhe 8′ 5″ hat?

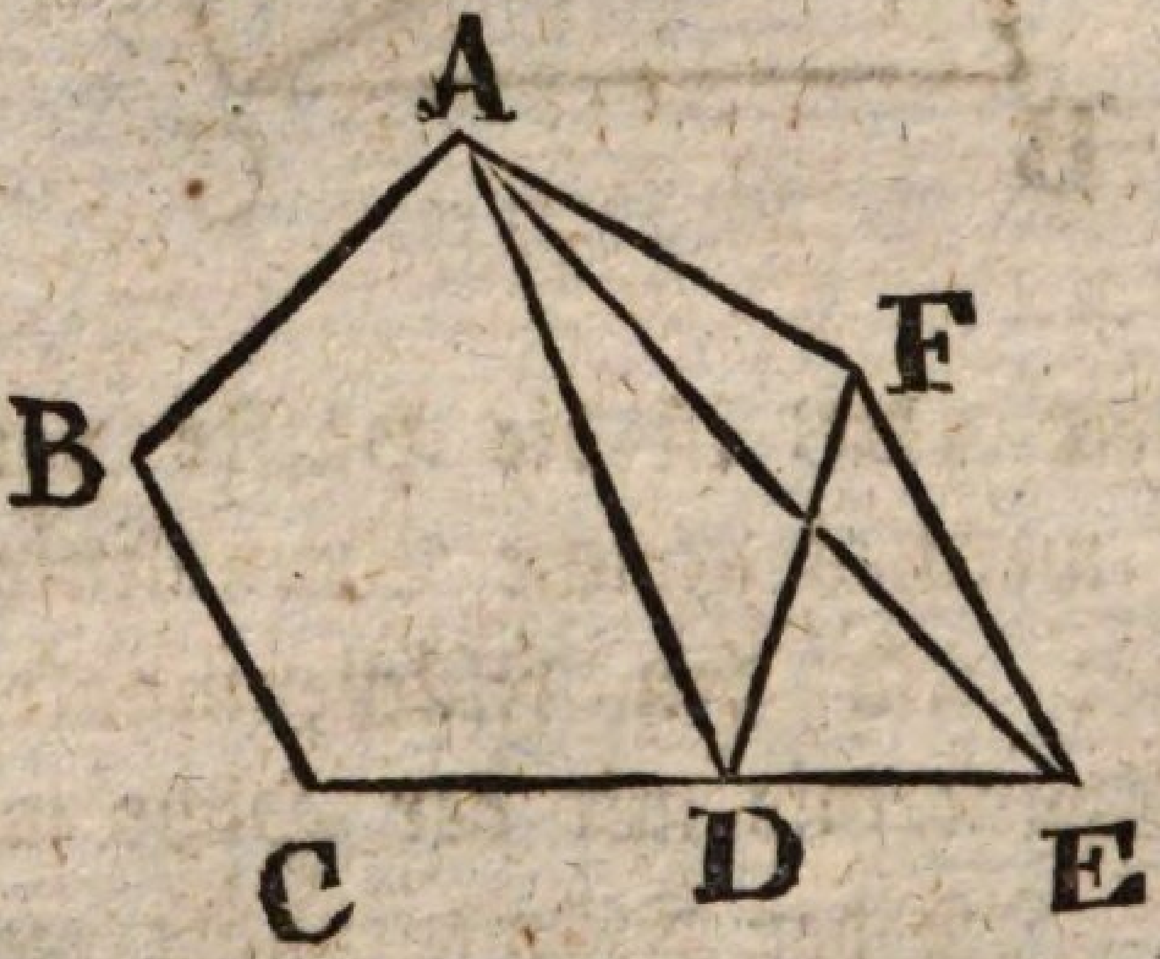
Wie groß muß die Grundlinie eines Dreieckes seyn, wenn der Flächeninhalt 28□′ 76□″ und die Höhe 12′ 5′ hat?

Wie groß ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Grundlinie 18′ 10″ hält?

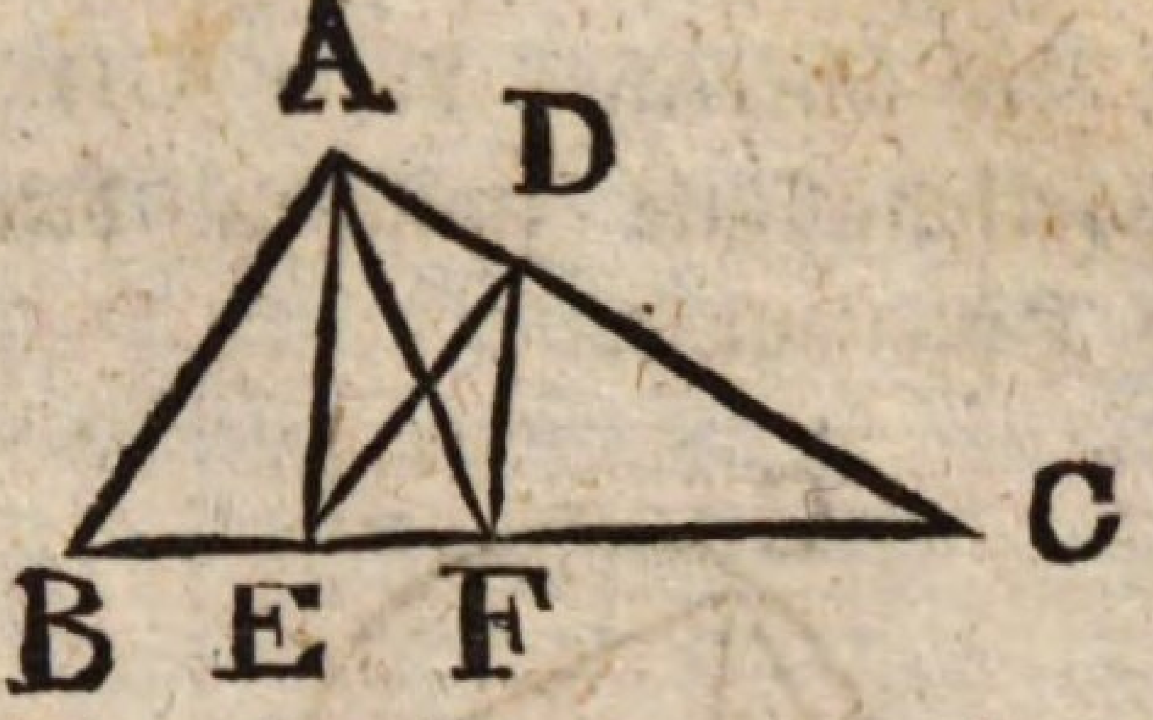
Um ein Vieleck von beliebiger Seitenzahl auszumessen, zerlegt man es in Dreiecke, deren Areale (Flächeninhalte) man ausmißt und nachher addirt.



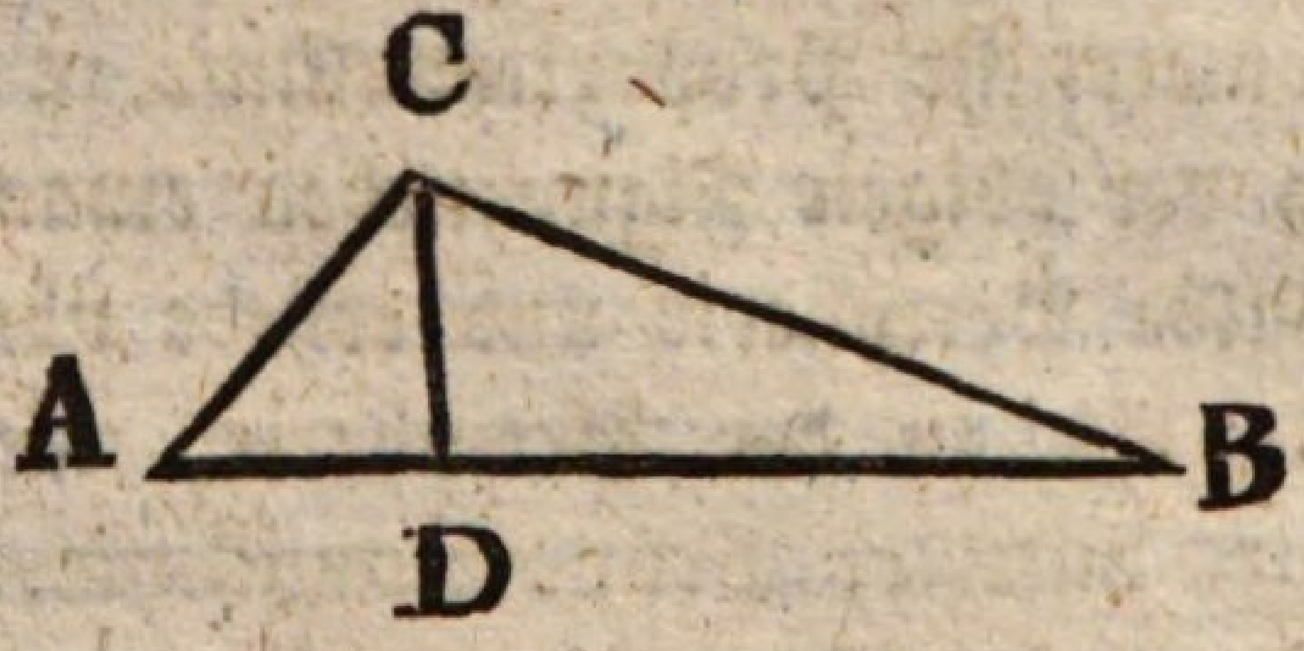
Alle Dreiecke AEB, AFB, AGB, die eine gemeinschaftliche Grundlinie AB haben, und deren Scheitel E,F,G auf einer geraden Linie CD liegen, die mit der gemeinschaftlichen Grundlinie parallel ist, sind an Flächeninhalt einander gleich; denn sie haben außer der gemeinschaftlichen Grundlinie auch noch gleiche Höhen. Auf diese Eigenschaft der Dreiecke gründen sich die Auflösungen mehrerer Aufgaben.



Ein Vieleck ABCDF kann immer in ein anderes verwandelt werden, dessen Seitenzahl um eins weniger ist. Man ziehe nämlich die Diagonallinie AD, ziehe durch F eine Linie, welche mit AD parallel ist und die Verlängerung von CD in E durchschneidet und ziehe dann AE, so wird das Viereck ABCE so groß seyn als das Fünfeck ABCDF; denn man hat diesem das Dreieck AFD entzogen und dasselbe durch das Dreieck AED ersetzt, welches ihm, dem obigen Satze zufolge, an Flächeninhalt gleicht. Man kann nun durch fortgesetzte Verminderungen der Seitenzahl jedes gegebene Vieleck in ein Dreieck von gleichem Flächeninhalt verwandeln.

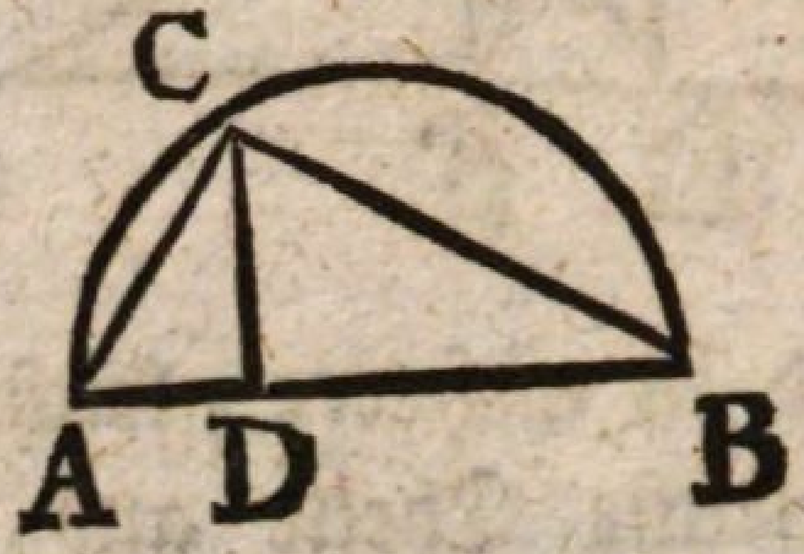


Ein Dreieck wird in mehrere gleiche Theile zerlegt, wenn man eben so viele gleiche Theile aus der Grundlinie macht und die Theilungspunkte mit dem gegenüber liegenden Scheitel durch gerade Linien verbindet, weil die daraus entstehenden Dreiecke gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben. Soll aber ein Dreieck ABC vermittelst einer geraden Linie halbirt werden, die durch einen auf seinem Umfange gegebenen Punkt D geht, so nehme man F in der Mitte von BC, ziehe AF und FD, mache AE parallel mit FD und ziehe ED, so ist ED die halbirende Linie; denn man hat der Hälfte AFC das Dreieck ADF entzogen und dasselbe durch das gleichhaltige Dreieck EFD ersetzt.



Es ist schon gezeigt worden, daß wenn man von der Spitze C des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreieckes ABC eine senkrechte Linie auf die Hypotenuse AB zieht, die zwei Theildreiecke ACD, BCD dem ganzen Dreiecke ABC ähnlich sind. Diese zwei Theildreiecke sind aber auch ähnlich unter sich; denn der W. CDA in dem ersten gleicht dem W. CDB in dem andern, als rechter Winkel, die W. ACD und CBD sind einander gleich, weil jedem von beiden der W. BCD an 90° fehlt, und aus einer ähnlichen Ursache ist W. BCD = W. CAD. Aus der Zusammenstellung der gleich-

liegenden Seiten erhält man die Proportion AD : CD = CD : BD, d. h. die senkrechte Linie CD ist eine mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den beiden Theilen AD und BD der Hypotenuse.



Wenn man von irgend einem Punkte C einer halben Peripherie eine senkrechte Linie CD auf den Durchmesser AB fallen läßt, so ist dieselbe gleichfalls eine mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den zwei Theilen AD und BD des Durchmesser, weil der Winkel ACB, der auf einem Bogen von 180° ruht, ein rechter Winkel ist, und jede der zwei Sehnen AC und BC ist eine mittlere geometrische Proporzionallinie zwischen dem anliegenden Theil AD oder BD und dem ganzen Durchmesser AB.

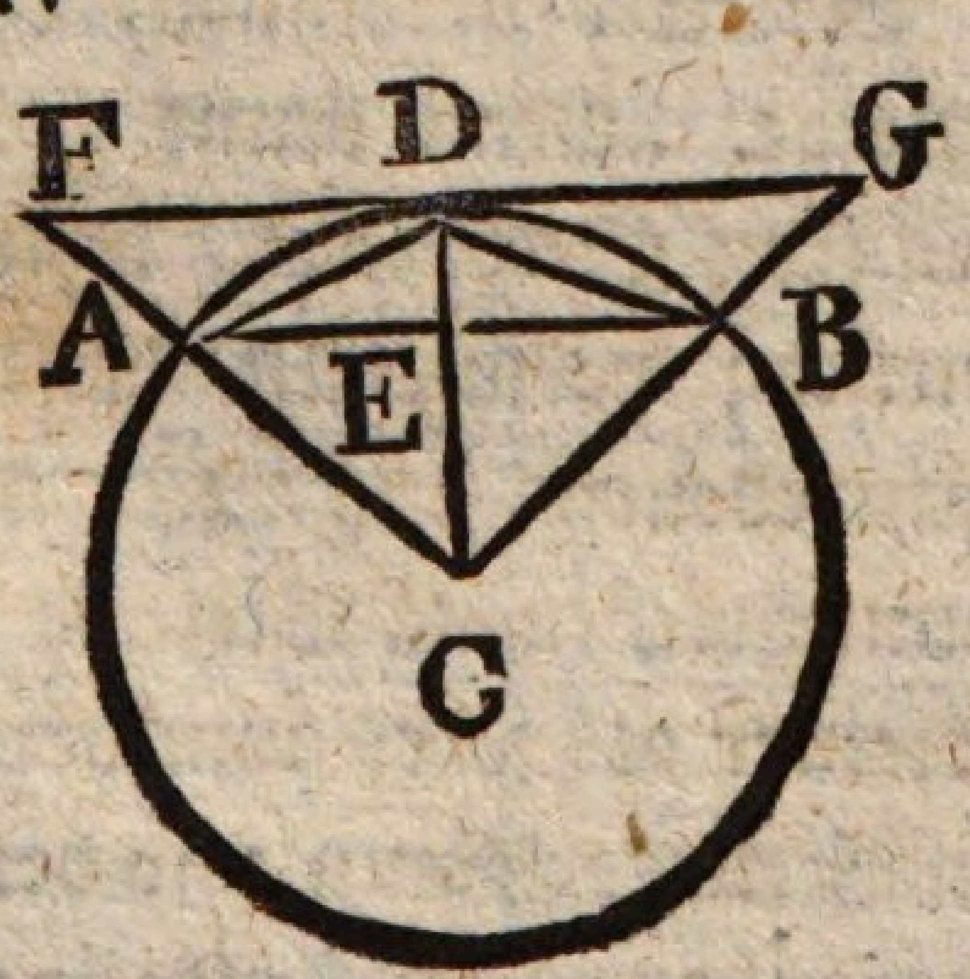
Um zwischen zwei gegebenen geraden Linien AD und BD eine mittlere geometrische Proportionallinie zu erhalten, stelle man sie, wie in der obigen Figur neben einander, beschreibe über AB eine halbe Peripherie und erhebe über D eine senkrechte Linie CD bis zu der Peripherie, welche Senkrechte dann die verlangte mittlere Proportionallinie ist.

Man kann vermittelst dieser Construction ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt verwandeln; man findet nämlich die Seite des verlangten Quadrates, indem man eine mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Grundlinie und der Höhe sucht; denn bezeichnet man die Grundlinie durch m, die Höhe durch n und die mittlere geometrische Proportionallinie durch x, so hat man die Proportion $m : x = x : n$; daher $m \times n = x \times x$.

Auch ein Dreieck kann man in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt verwandeln, indem man eine mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Grundlinie und der Hälfte

der Höhe, oder zwischen der Höhe und der Hälfte der Grundlinie sucht. Da nun jedes Vieleck in ein Dreieck verwandelt werden kann, so kann man auch jedes Vieleck in ein Quadrat verwandeln. Weit schwieriger ist die Aufgabe, eine Kreisfläche in ein Quadrat zu verwandeln, weche unter der Benennung Quadratur des Zirkels bekannt ist. Sie kann nur durch Eintheilung des Durchmessers in sehr kleine Theile, oder durch Ausmessung desselben vermittelst eines Maaßstabes zu Stande gebracht werden. Man kann indessen sowohl den Flächeninhalt, als die Peripherie eines Kreises mit einer Genauigkeit bestimmen, die durchaus nichts zu wünschen übrig läßt.

Um den Flächeninhalt zu bestimmen, stelle man sich vor, eine Kreislinie sey in unzählig viele, sehr kleine Bogen getheilt, und die Theilungspunkte mit dem Mittelpunkte durch Halbmesser verbunden. Die kleinen Bogen sind wegen der ganz unmerklichen Krümmung wie gerade Linien und die Ausschnitte wie Dreiecke zu betrachten, die zusammen die Kreisfläche bilden, und deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser ist. Man findet also die Kreisfläche, wenn man jeden dieser Bogen mit der Hälfte des Halbmessers multiplizirt und die Producte addirt, oder auch, wenn man die Summe der Bogen mit der Hälfte des Halbmessers multiplizirt; die Summe dieser Bogen bildet aber die Kreislinie; man findet also die Kreisfläche, wenn man die Kreislinie mit der Hälfte des Halbmessers multiplizirt. Um aber die Kreislinie selbst auszurechnen, wollen wir zuerst folgende zwei Aufgaben lösen:



Die Länge einer Sehne AB, so wie der Halbmesser des Kreises sind gegeben, und man soll die Länge einer Sehne AD ausrechnen, deren Bogen halb so groß ist, als der Bogen ADB.

Die verlangte Sehne AD ist die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreieckes ADE, dessen Kathete AE bekannt ist, denn sie ist die Hälfte der Sehne AB, und es bleibt nur noch die Größe der Kathete DE zu bestimmen. Diese wird gefunden, wenn man die Größe von EC vermittelst des rechtwinklichen Dreieckes AEC ausrechnet, in welchem die Hypotenuse AC als Halbmesser und die Kathete AE bekannt sind, und dann EC vom Halbmesser abzieht. Ist z. B. AB = 100′, so ist AE = 50′ EC = 86, 6..., daher DE = 100 — 86. 6... = 13, 4.. und AD = 51, 7...

AB sey eine Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regulären Vieleckes, und man soll die Seite eines umschriebenen regulären Vieleckes von gleicher Seitenzahl construiren und ausrechnen.

Man ziehe einen Radius CD senkrecht auf AB und führe durch D eine Tangente, welche von den verlängerten Halbmessern AC und BC in F und in G durchschnitten wird, so ist FG, wie man sich leicht überzeugen kann, eine Seite des verlangten umschriebenen Vieleckes. Ihre Länge, oder vielmehr die ihrer Hälfte DF findet man durch die Proportion: CE : AE = CD : FD, deren drei ersten Glieder gegeben, oder leicht zu berechnen sind.

Man kann nun den Umfang eines eingeschriebenen und eines umschriebenen Vieleckes berechnen, deren Seitenzahl jede beliebige Zahl übersteigt. Man kennt z. B. den Umfang des eingeschriebenen regulären Sechseckes, welcher dreimal so groß ist, als der Durchmesser; vermittelst desselben kann man den Umfang des eingeschriebenen 12, 24, 48eckes 2c. und den der entsprechenden umschriebenen Vielecke berechnen. Nun ist aber die Kreislinie kleiner als jedes umschriebene und größer als jedes eingeschriebene Vieleck. Wenn also der Unterschied zwischen zwei solchen Vielecken kleiner ist, als irgend eine angegebene

Zahl, so ist der Unterschied zwischen der Kreislinie und jedem dieser Vielecke gewiß kleiner als diese Zahl. Will man also eine Zahl finden, die, bei einem gegebenen Durchmesser, der Kreislinie so nahe komme, daß der Irrthum kleiner sey, als eine gegebene Größe, z. B. $\frac{1}{10000}$, so muß man die Berechnung der eingeschriebenen und der umschriebenen Vielecke so lange fortsetzen, bis ihr Unterschied kleiner ist, als diese Zahl, da dann der Umfang eines jeden der beiden Vielecke den des Kreises mit dem verlangten Grad von Genauigkeit angiebt. Man hat auf diese Weise gefunden, daß die Kreislinie sich zum Durchmesser ungefähr wie 22 : 7 verhält. Genauer ist das Verhältniß von 355 : 113; noch genauer das Verhältniß von 3,1415926 : 1. Dieser letztere Dezimalbruch wird gewöhnlich durch den griechischen Buchstaben π vorgestellt. Bezeichnet man also den Radius durch r, oder den Durchmesser durch 2 r, die Kreislinie durch k und die Kreisfläche durch s, so hat man die Proportion $k : 2r = \pi : 1$; daher $k = 2\pi r$. Man hat ferner (s. S. 57) $s = k \times \frac{1}{2} r. = 2\pi r. \frac{1}{2} r. = \pi r^2$; d. h. der Flächeninhalt des Kreises wird gefunden, wenn man das Quadrat des Halbmessers mit der Zahl π multiplizirt.

Aus diesen Sätzen geht hervor:

1°) Daß zwei Kreislinien sich zu einander verhalten, wie ihre Halbmesser.

2°) Daß zwei Kreisflächen sich zu einander verhalten, wie die Quadraten ihrer Halbmesser.

Eine Kreislinie zu beschreiben, die der Summe oder der Differenz zweier Kreislinien gleiche.

Eine Kreisfläche zu bilden, die der Summe oder der Differenz zweier Kreisflächen gleiche.

Wie groß sind die Kreislinie und die Kreisfläche, wenn der Halbmesser 6′ 8″ hält?

Wie groß sind der Halbmesser und die Kreisfläche, wenn die Kreislinie 18′ 17″ hält?

Wie groß ist der Halbmesser des Aequators, der 5400 deutsche Meilen im Umfang hat?

Wie groß sind der Halbmesser und die Kreislinie, wenn die Kreisfläche 45□' 76□" hält?

Wie groß ist ein Bogen 25° 24', wenn der Halbmesser 8' 5" hat?

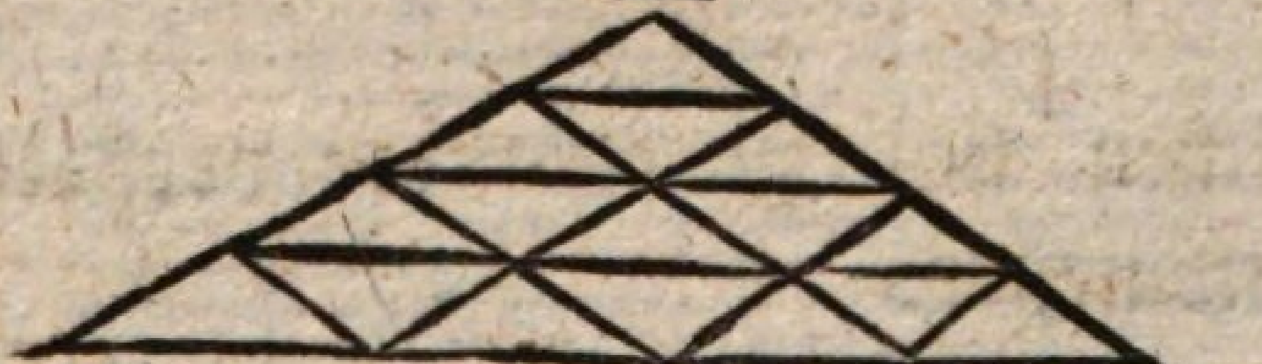
Wie groß ist der Ausschnitt, welcher einem Bogen von 54° 48' entspricht, wenn der Halbmesser 24' 10" enthält?

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Ringes, der durch zwei, aus demselben Mittelpunkte beschriebene Kreislinien gebildet wird, wenn der große Halbmesser 7' 6" und der kleine 5' 8" enthält?

Was hier vom gegenseitigen Verhältnisse zweier Kreislinien oder zweier Kreisflächen bewiesen wurde, gilt auch von den Umfangslinien und den Arealen (Flächeninhalten) der ähnlichen Vielecke, wie jetzt bewiesen werden soll:

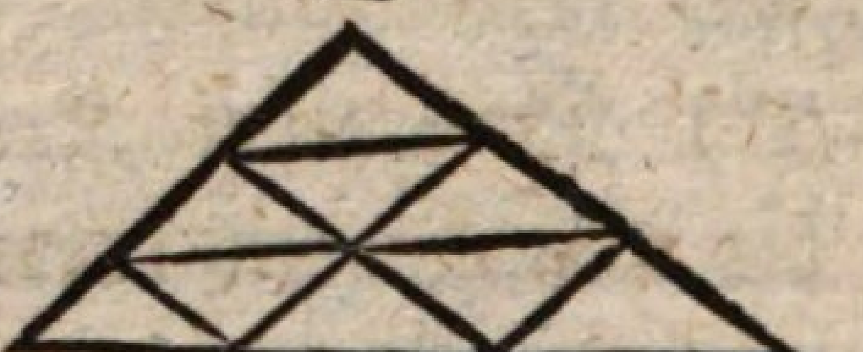
1°) Die Umfangslinien zweier ähnlichen Vielecke verhalten sich wie die gleichliegenden Seiten. Denn, bezeichnet man die Seiten des einen durch A,B,C,... und die des andern durch a,b,c,..., so wird a so oft in A enthalten seyn, als b in B, c in C ꝛc., so daß, wenn z. B. A = 3 a, auch auch B = 3 b, C = 3 c ꝛc. seyn wird; mithin ist auch A + B + C + ꝛc., oder die Umfangslinie des ersten Vieleckes dreimal so groß als a + b + c + ꝛc., oder als die Umfangslinie des zweiten Vieleckes; folglich verhalten sich die Umfangslinien zweier ähnlichen Vielecke, wie die gleichliegenden Seiten.

A



B C

D



E F

2°) Die Areale zweier ähnlichen Dreiecke ABC, DEF verhalten sich zu einander, wie die Quadraten ihrer gleichliegenden Seiten. Wenn z. B. BC : EF = 5 : 3, so ist ABC : DEF = 5 × 5 : 3 × 3 = 25 : 9, wie man sich durch die Zerlegung der Dreiecke leicht überzeugen kann. Die Areale ähnlicher Vielecke verhalten sich auch zu einander, wie die Quadraten der gleichliegenden Seiten; indem die einzelnen

Dreiecke, aus welchen dieselben bestehen, dieses Verhältniß zu einander haben.

Dieser Satz findet seine Anwendung, wenn eine Zeichnung so copirt werden soll, daß der Flächeninhalt der Copie zu dem des Originals ein bestimmtes Verhältniß habe. Wenn z. B. die Copie dreimal so groß seyn soll, als das Original, so muß das Quadrat der Längeneinheit, deren man sich bei der Copie bedient 9 Mal so groß seyn, als das Quadrat der Längeneinheit, die man zum Original gebraucht hat.

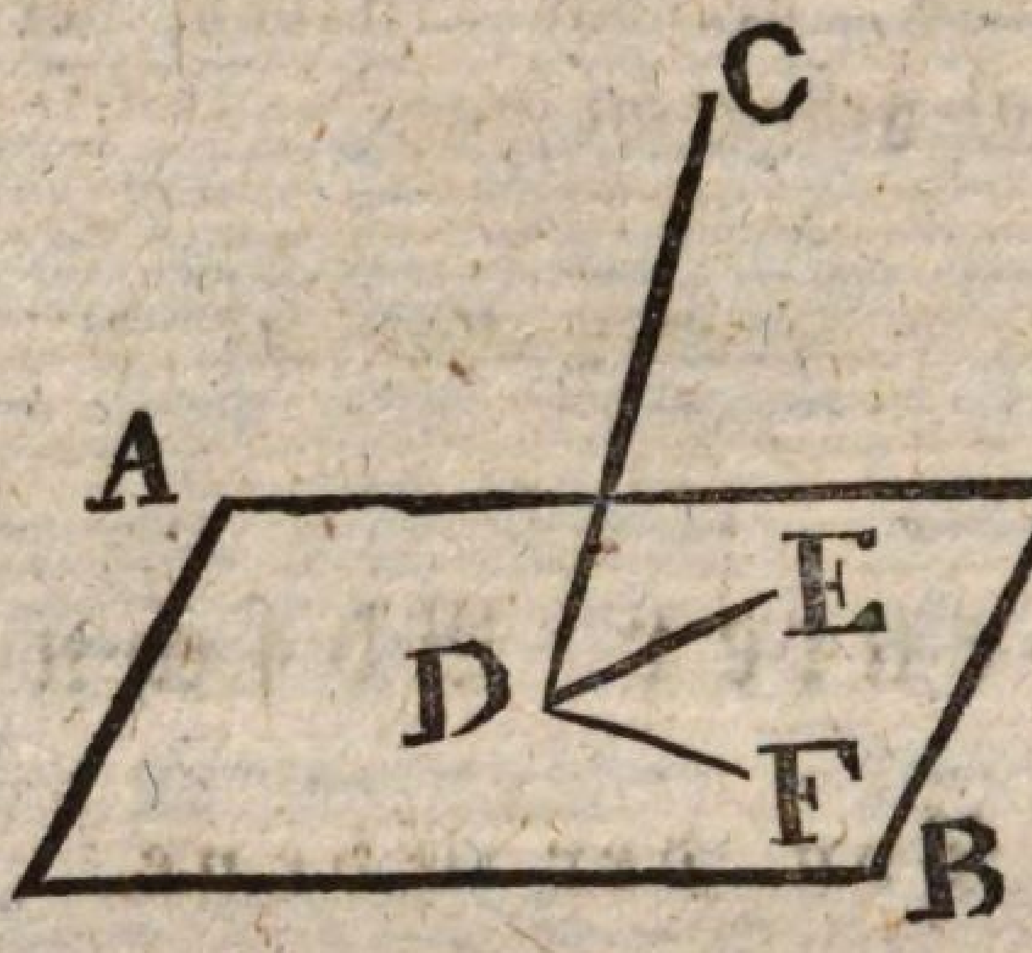
Siebenter Abschnitt.

Von der Ebene.

Die Lage einer Ebene im Raum ist nicht, wie die einer geraden Linie, durch zwei Punkte bestimmt, die in ihr enthalten sind; denn man kann eine Ebene so drehen, daß solche zwei Punkte dabei unbeweglich bleiben. Sind aber drei Punkte gegeben, die nicht in einer geraden Linie liegen, und zu einer Ebene gehören, so ist dadurch die Lage der Ebene vollkommen bestimmt; indem man sie in keiner Richtung drehen kann, ohne daß sie einen der drei Punkte verläßt: Es folgt hieraus: 1°) daß die Lage einer Ebene bestimmt ist durch zwei gerade Linien, die sich schneiden, und durch zwei parallele Linien, da man auf zwei solchen Linien immer drei Punkte nehmen kann, die nicht in gerader Linie liegen; 2°) daß die Durchschneidung zweier Ebenen immer eine gerade Linie ist; denn durchschnitte sich zwei Ebenen in einer krummen Linie, so könnte man auf derselben drei Punkte nehmen, die nicht in gerader Linie liegen, und beide Ebenen würden durch diese drei Punkte gehen, welches nicht möglich ist.

Um einer Masse von Erde eine ebene Oberfläche zu geben, schiebt man auf derselben eine rechtwinkliche Einrahmung, und

räumt alle Erde weg, die über die Ebene der Einrahmung hervorragt, oder drückt sie nieder. Eine ähnliche Vorrichtung wird angewendet, wenn mehrere Pfähle so abgestumpft werden sollen, daß ihre oberen Flächen alle in einer wagerechten Ebene liegen. Wenn man einem Brette durch das Hobeln eine ebene Gestalt geben will, so muß zuerst die Hobel in zwei sich durschneidenden Richtungen gezogen werden.



Eine gerade Linie CD steht auf der Ebene AB senkrecht, wenn sie mit allen geraden Linien DE, DF, welche durch den Durchschnittpunkt D gehen und auf der Ebene AB liegen, rechte Winkel bildet.

Es ist in dem ersten Abschnitt (s. S. 4) bemerkt worden, daß man über einen Punkt einer geraden Linie keine zwei Senkrechten erheben kann; dies ist aber nur dann wahr, wenn die zwei senkrechten Linien und die gegebene in einer Ebene liegen sollen; sonst kann man über einen Punkt einer geraden Linie unendlich viele Senkrechten erheben, und sämmtliche Senkrechten liegen in einer Ebene, auf welcher die gegebene gerade Linie senkrecht steht.

Es folgt hieraus, daß, wenn eine gerade Linie CD nur mit zwei Linien wie DE und DF rechte Winkel macht, sie auf der Ebene AB senkrecht stehen werde, indem die Ebene, welche sämmtliche Senkrechten enthält, die man über CD im Punkte D erheben kann, nothwendig diejenige ist, welche durch DE und DF geht, durch welche Linien ihre Lage im Raum vollkommen bestimmt ist.

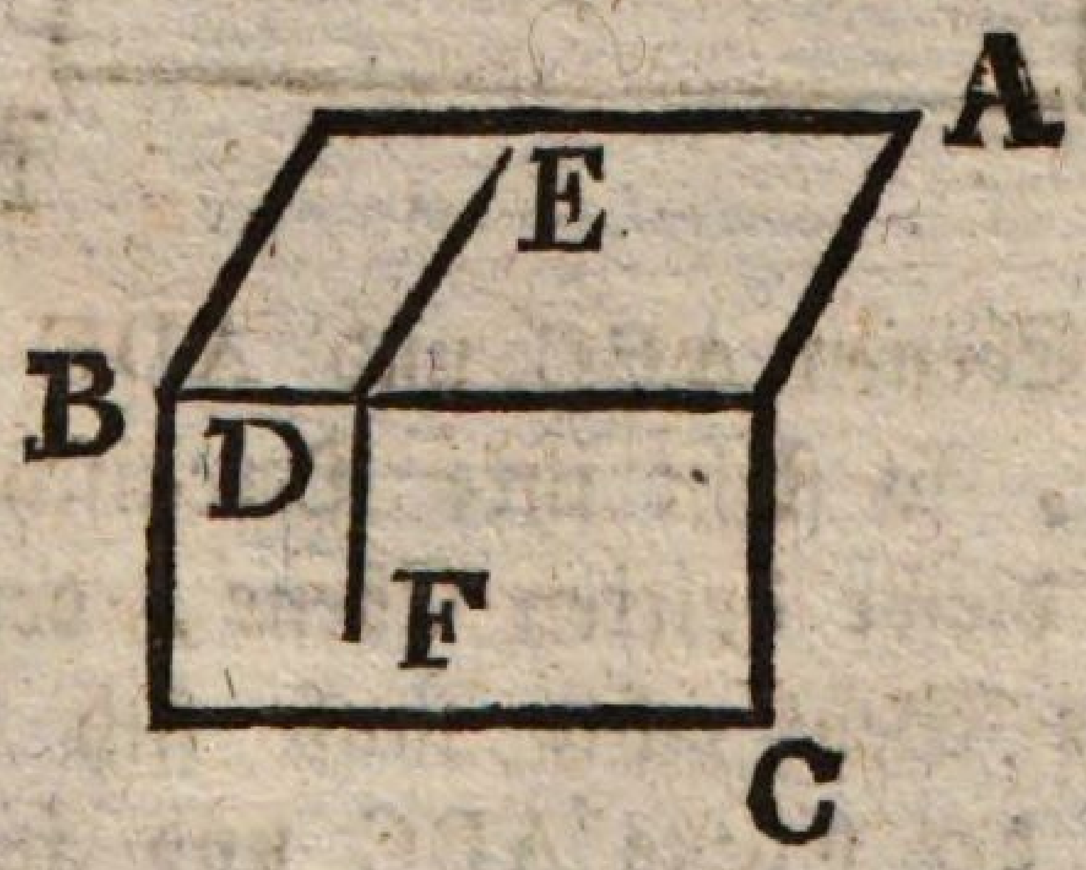
Die senkrechte Linie CD ist die kürzeste Linie, die von einem außerhalb der Ebene AB liegenden Punkte C nach der

Ebene geführt werden kann. Unter den schiefen Linien sind die am kleinsten, deren Abstand von der Senkrechten am kleinsten ist, und diejenigen schiefen Linien, die gleichweit von der Senkrechten abstehen, sind alle einander gleich. Man kann von einem äußeren Punkte aus unzählige schiefe Linien ziehen, die alle gleichweit von der Senkrechten entfernt sind, und ihre Durchschnittpunkte bilden einen Kreis, durch dessen Mittelpunkt die senkrechte geht.

Man kann sich dieser Eigenschaft bedienen, um von einem außerhalb einer Ebene gegebenen Punkte eine Senkrechte auf die Ebene zu fällen. Man bestimme nämlich auf der Ebene drei Punkte, die gleiche Entfernung von dem gegebenen haben. Lasse durch dieselben eine Kreislinie gehn und verbinde den Mittelpunkt dieser Kreislinie mit dem gegebenen Punkte.

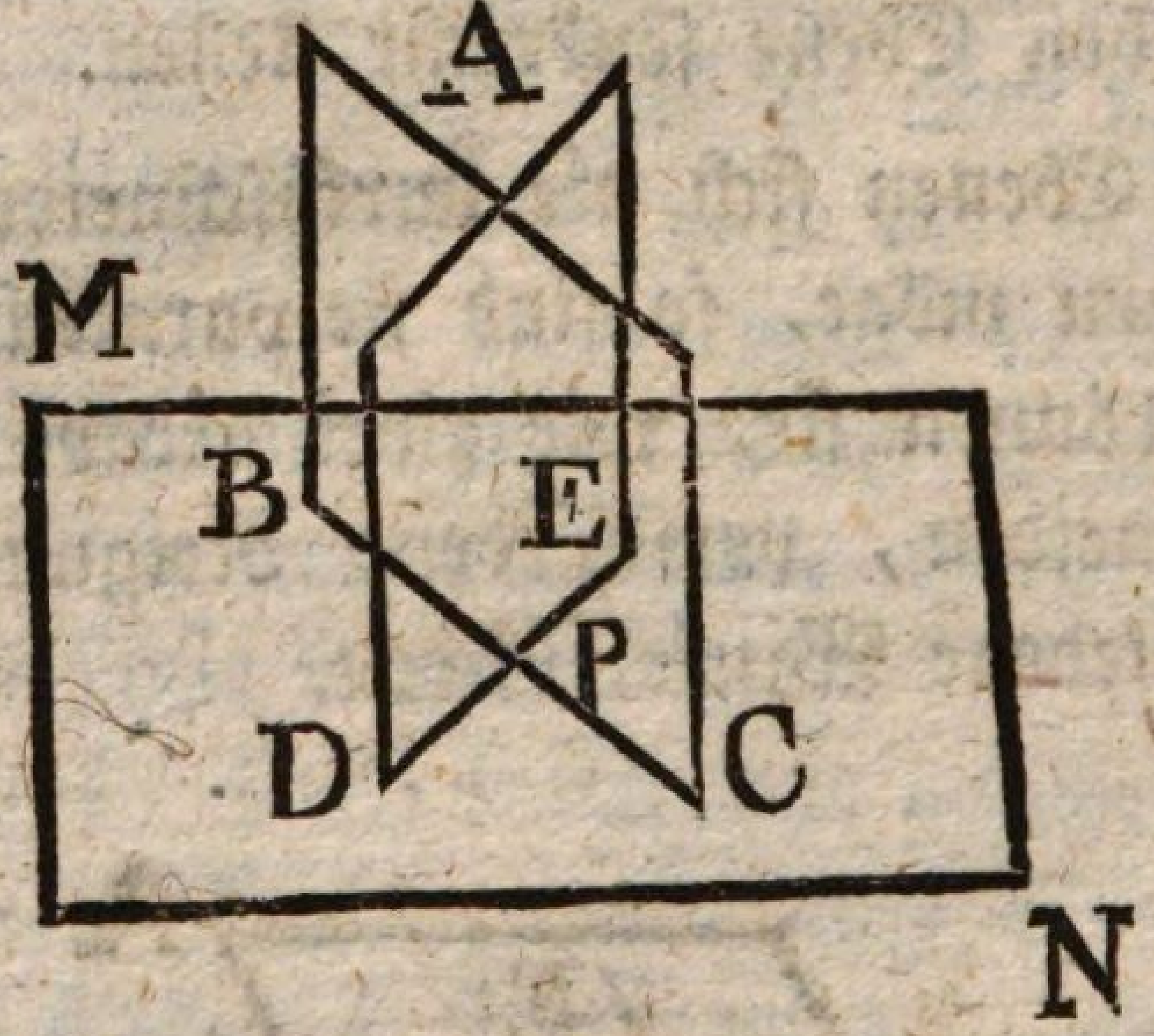
Durch einen und denselben Punkt, er mag auf einer Ebene oder außerhalb derselben liegen, kann man keine zwei gerade Linien gehen lassen, die auf der Ebene senkrecht steht. Wenn daher über zwei verschiedene Punkte einer Ebene senkrechte Linien erhoben werden, so sind dieselben parallel, und umgekehrt, wenn zwei gerade Linien parallel sind, und eine derselben steht senkrecht auf einer Ebene, so wird auch die zweite auf derselben Ebene senkrecht stehen.

Wenn zwei Ebenen sich nie durchschneiden, so weit man sie auch verlängern möge, so sind sie parallel; durchschneiden sie sich aber, so können sie, wie zwei gerade Linien, die sich einander durchschneiden, verschiedene Neigungen gegen einander haben, verschiedene Winkel bilden.



Der Winkel, den zwei Ebenen AB, BC mit einander bilden, kann, wie der zweier geraden Linien, ein rechter, stumpfer oder spitziger Winkel seyn. Um seine Größe genau zu bestimmen, nimmt man auf der Durchschnittlinie einen beliebigen Punkt D und erhebt über denselben zwei Senkrechten DE, DF, die erste in der Ebene AB und die zweite in der Ebene DF, so wird die Größe des Winkels EDF zugleich die des Winkels seyn, den die zwei Ebenen mit einander bilden.

Wenn die Ebene AB auf der Ebene BC senkrecht steht, so muß auch der Winkel EDB ein rechter Winkel seyn, und da übrigens auch EDF ein rechter Winkel ist, so steht ED senkrecht auf der Ebene BC. Es folgt hieraus: 1°) wenn man über einen Punkt der Durchschnittlinie zweier Ebenen, die mit einander einen rechten Winkel bilden, eine gerade Linie erhebt, die auf einer der beiden Ebenen senkrecht steht, dieselbe in der anderen Ebene zu liegen kommt. 2°) Wenn man eine Ebene durch eine gerade Linie gehen läßt, die auf einer andern Ebene senkrecht steht, so werden die zwei Ebenen einen rechten Winkel mit einander bilden.



Wenn zwei Ebenen ABC und ADE auf einer dritten MN senkrecht steht, so steht ihre Durchschnittlinie AP ebenfalls senkrecht auf dieser dritten Ebene, denn eine über den Punkt P erhobene Senkrechte muß sich dem obigen Satze zufolge zugleich in der Ebene ABC und in der Ebene ADE befinden.

Obgleich die Oberfläche der Erde eine Kugelgestalt hat, so kann doch ein nicht sehr beträchtlicher Theil dieser Oberfläche, wenn man sich die kleinen Erhöhungen und Vertiefungen wegdenkt, als eine Ebene betrachtet werden. Dieser als Ebene erscheinende Theil der Erdfläche heißt für den Ort, auf welchem man sich befindet, der scheinbare Horizont, und jede Ebene, die mit ihr gleichlaufend ist, heißt eine Horizontalebene, oder eine wagerechte Ebene. Wenn ein Körper zur Erde fällt, so ist die gerade Linie, in welcher er sich bewegt, senkrecht auf dem Horizont. Eine solche gerade Linie heißt eine Vertikal- oder Scheitellinie, und ihre Lage wird bestimmt durch ein Senkblei, d. h. durch eine frei hängende Schnur, an deren Ende ein sie spannender Körper angebracht ist. Jede Vertikallinie wird, wenn ihre Richtung fortgesetzt wird, durch den Mittelpunkt der Erde gehn, vorausgesetzt, daß diese wirklich eine vollkommene Kugelgestalt habe. Eine Ebene, die so durch den Mittelpunkt der Erde geht, daß die Vertikallinie eines Ortes auf ihr senkrecht steht, ist der wahre Horizont des Ortes und ist mit dem scheinbaren Horizonte parallel. Eine Ebene, die auf dem Horizonte eines Ortes senkrecht steht, heißt eine Vertikal- oder Scheitelebene, und enthält, nach dem Obigen, nothwendig die Scheitellinie des Ortes, woraus denn auch folgt, daß die Durchschnittlinie zweier Vertikalebenen immer die Vertikallinie des Ortes ist. Die Decken und Böden der Gebäuden sind alle Horizontalebenen. Die Mauern und Scheidewände hingegen sind Vertikalebenen. Unter den Vertikalebenen eines Ortes ist besonders die zu bemerken, deren Verlängerung durch die Erdpole geht; sie heißt die Meridianebene, und die gerade Linie, in welcher sie die Oberfläche der Erde durchschneidet, heißt die Meridianlinie.

Achter Abschnitt.

Darstellende Geometrie.

Vom Punkte, der geraden Linie und der Ebene.

Die darstellende Geometrie giebt die Mittel an, jeden durch geometrische Merkmale bestimmbaren, im Raume gegebenen Gegenstand auf Ebenen darzustellen, und durch diese Darstellung die geometrischen Eigenschaften der Gegenstände, so wie ihre gegenseitigen Beziehungen aufzufinden.

Die Ebenen, auf welchen die Gegenstände dargestellt werden, heißen Projektionsebenen.

Wenn man von einem Punkte, der sich außerhalb einer Ebene befindet, eine senkrechte Linie auf diese Ebene ziehet, so ist der Durchschneidungspunkt die Projektion des gegebenen Punktes.

Obgleich die Projektion einigermaßen als die Darstellung eines Punktes betrachtet werden kann, so ist doch die wahre Lage des Punktes im Raume dadurch noch nicht vollkommen bestimmt; man weiß nur, daß er sich auf der senkrechten Linie befindet, die über der Projektion errichtet wird; aber nicht, wie weit er von derselben entfernt ist.

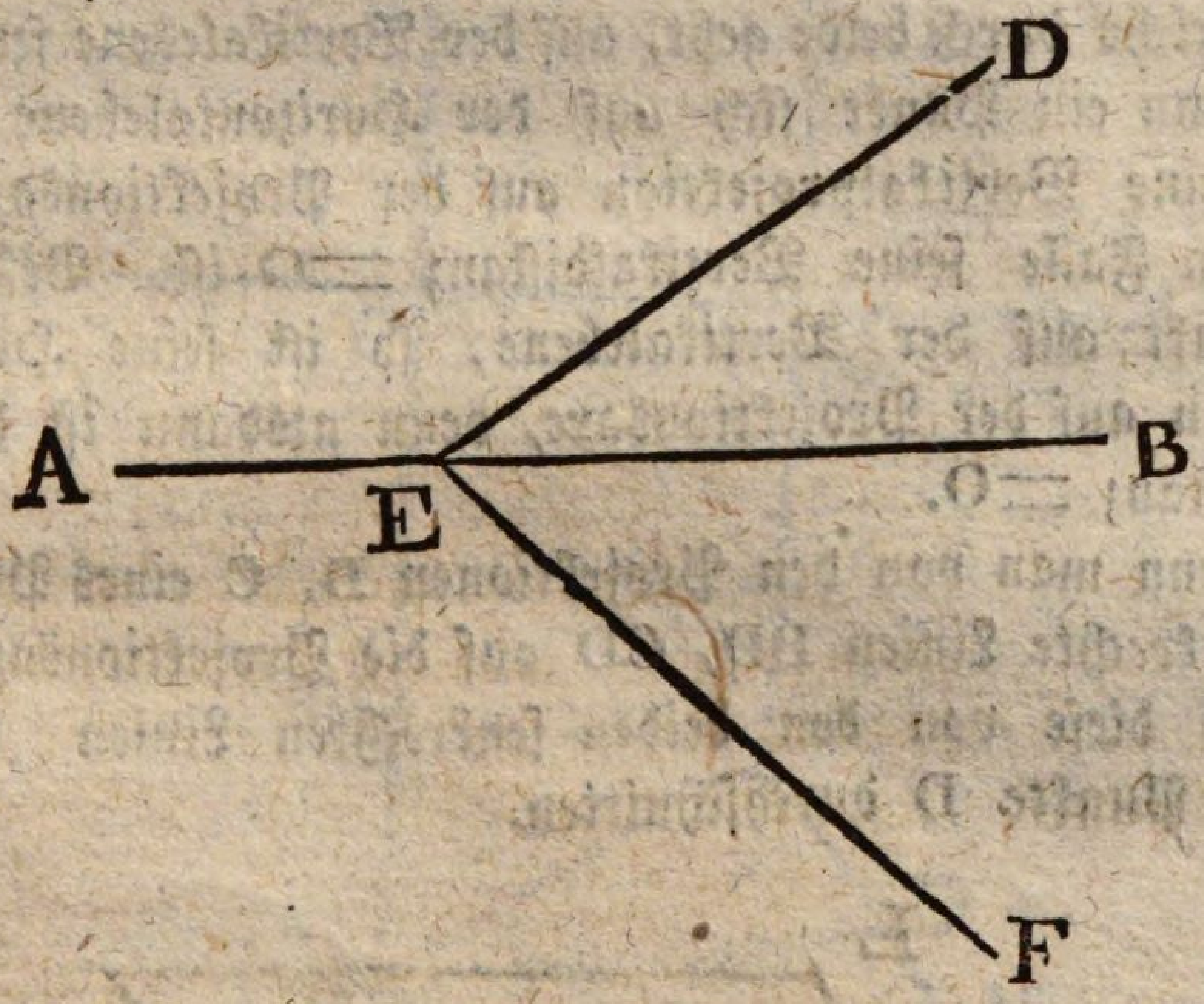
Gewöhnlich werden die Gegenstände auf zwei nicht gleichlaufenden Ebenen dargestellt, die sich in einer geraden Linie durchschneiden. Diese Durchschneidungslinie nennt man die Projektionsaxe.

Die zwei Projektionsebenen können zwar einen beliebigen Winkel mit einander machen, aber dennoch werden alle Konstruktionen sehr erleichtert, wenn sie über einander senkrecht stehen. In diesem Falle nennt man zur Unterscheidung eine der beiden Projektionsebenen die Horizontalebene, und die andere die Vertikalebene, obgleich die Richtung dieser Ebenen gegen die Oberfläche der Erde ganz willkührlich ist.

Denkt man sich, daß die Vertikalebene sich um die Projektionsaxe bewegt, bis sie in die Verlängerung geräth, so läßt sich das System durch zwei Rechtecke, die eine gemeinschaftliche Seite haben, darstellen. Es ist alsdann sogar nicht nöthig, die

Ebenen durch irgend eine geometrische Figur vorzustellen, sondern es ist hinreichend, wenn man ihre Lage durch die Projektionsaxe angiebt. Der Theil der F.gur, welcher sich unter der Projektionsaxe befindet, stellt alsdann füglich die Horizontalebene, und der andere Theil die Vertikalebene vor. Diese Darstellungsart hat übrigens so viele Bequemlichkeiten, daß wir uns in der Folge immer derselben bedienen werden.

Gerade Linien werden, so wie Punkte, durch ihre Projektionen auf zwei nicht parallelen Ebenen dargestellt. Die Projektion einer geraden Linie ist ebenfalls eine Linie auf der Projektions-Ebene, welche die Summe der Projektionen sämmtlicher Punkte enthält, die sich auf der dargestellten Linie befinden.



Eine nicht begränzte Ebene kann nicht durch die Summe der Projektionen ihrer einzelnen Punkte dargestellt werden, denn es ist leicht einzusehen, daß diese die beiden Projektionsebenen gänzlich ausfüllen würde. Man zeigt daher nur ihre Durchschneidungslinien mit den zwei Projektionsebenen an, wodurch der Ort der Ebene im Raume vollkommen bestimmt ist, indem schon drei einzelne Punkte, wenn sie sich nur nicht in einer geraden Linie befinden, dazu hinreichen würden. Diese Durchschneidungs-Linien nennt man die Durchgänge der Ebene. Hier ist DE der horizontale und EF der vertikale Durchgang einer dargestellten Ebene.

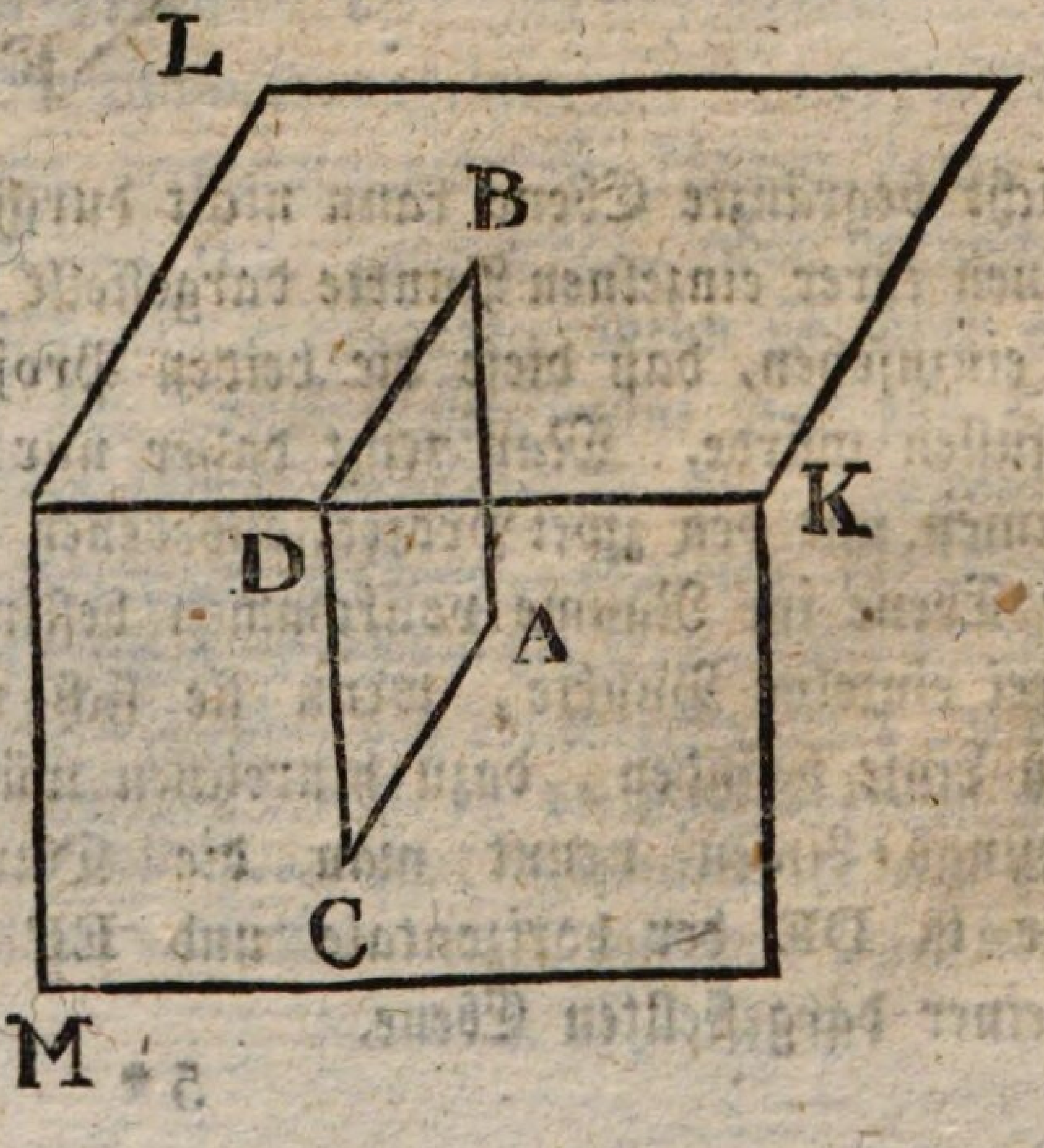
Obwohl der Ort einer geraden Linie durch die zwei Projektionen hinreichend bestimmt ist, so hat man doch nur dann eine deutliche Vorstellung von ihrer Lage im Raume, wenn man die Punkte kennt, wo sie die Projektionsebenen durchschneidet. Diese Punkte nennt man die Durchgänge der Linie.

Der Ort eines Punktes im Raume ist vollkommen bestimmt durch seine zwei Projektionen, so daß durch dieselben Projektionen kein anderer Punkt im Raume dargestellt werden kann.

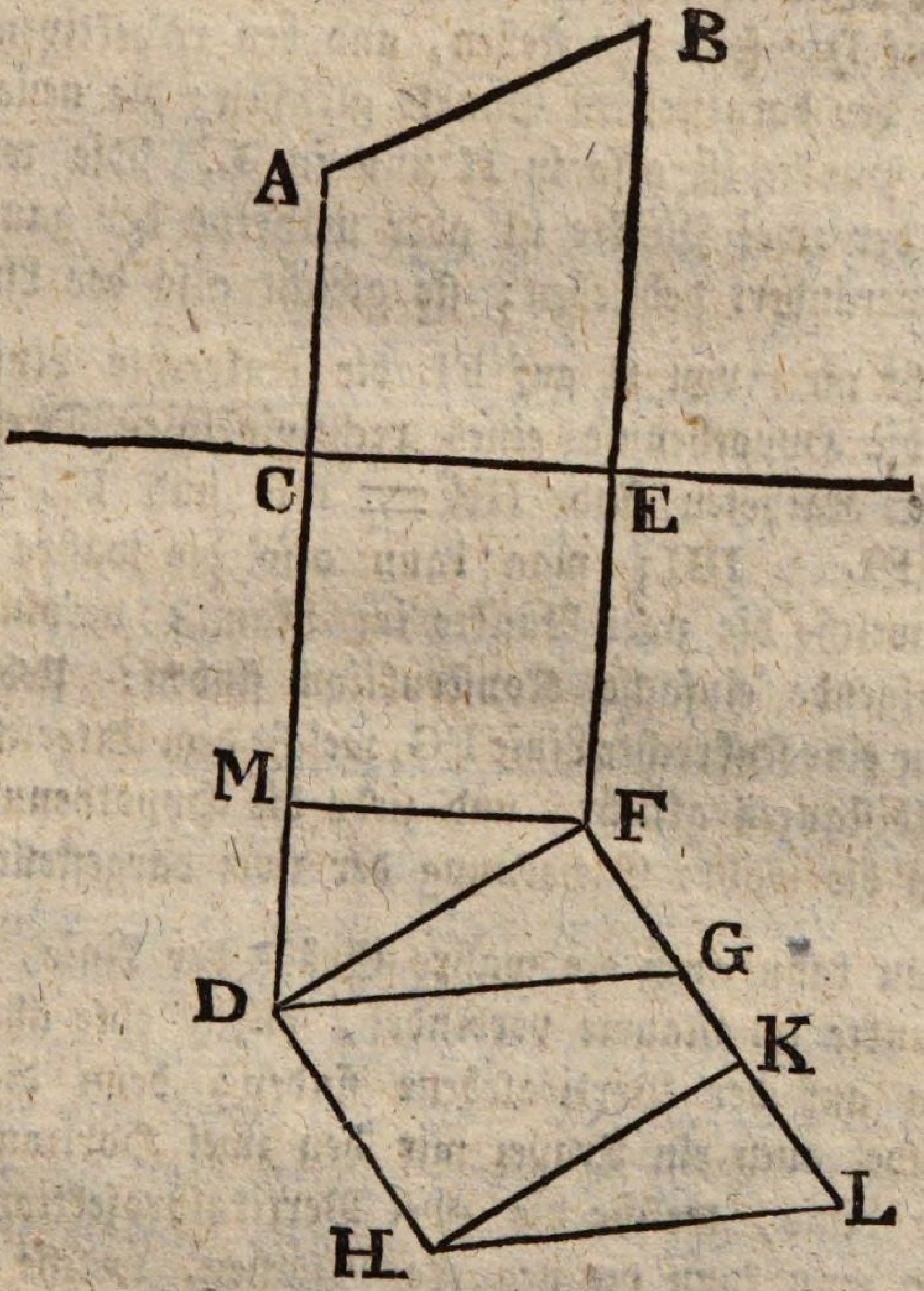
Wenn zwei Punkte die Horizontalprojektion gemeinschaftlich haben, so ist die gerade Linie, welche sie verbindet, senkrecht auf der Horizontalebene. Haben die zwei Punkte eine gemeinschaftliche Vertikalprojektion, so ist die gerade Linie, welche durch beide geht, auf der Vertikalebene senkrecht.

Wenn ein Punkt sich auf der Horizontalebene befindet, so ist seine Vertikalprojektion auf der Projektionsaxe, weil in diesem Falle seine Vertikaldistanz =O ist. Befindet sich der Punkt auf der Vertikalebene, so ist seine Horizontalprojektion auf der Projektionsaxe, denn alsdann ist die Horizontaldistanz =O.

Wenn man von den Projektionen B, C eines Punktes A zwei senkrechte Linien BD, CD auf die Projektionsaxe ziehet, so wird diese von den beiden senkrechten Linien in einem einzigen Punkte D durchschnitten.



Wenn man die Vertikal-Ebene um die Projektionsaxe bewegt, bis sie in die Verlängerung der Horizontal-Ebene tritt, so bleibt die Linie BD während der ganzen Bewegung senkrecht auf der Projektionsaxe, da aber CD ebenfalls auf der Projrktionsaxe senkrecht ist, so folgt daraus, daß die Linie BD, in ihrer neuen Lage, sich in der Verlängerung von CD befinden wird.



Zwei Punkte im Raume sind durch ihre Horizontalprojektionen A und B, und durch ihre Vertikal-Projektionen D und F dargestellt, und man verlangt die wahre Größe der Linie zu kennen, welche sie verbindet.

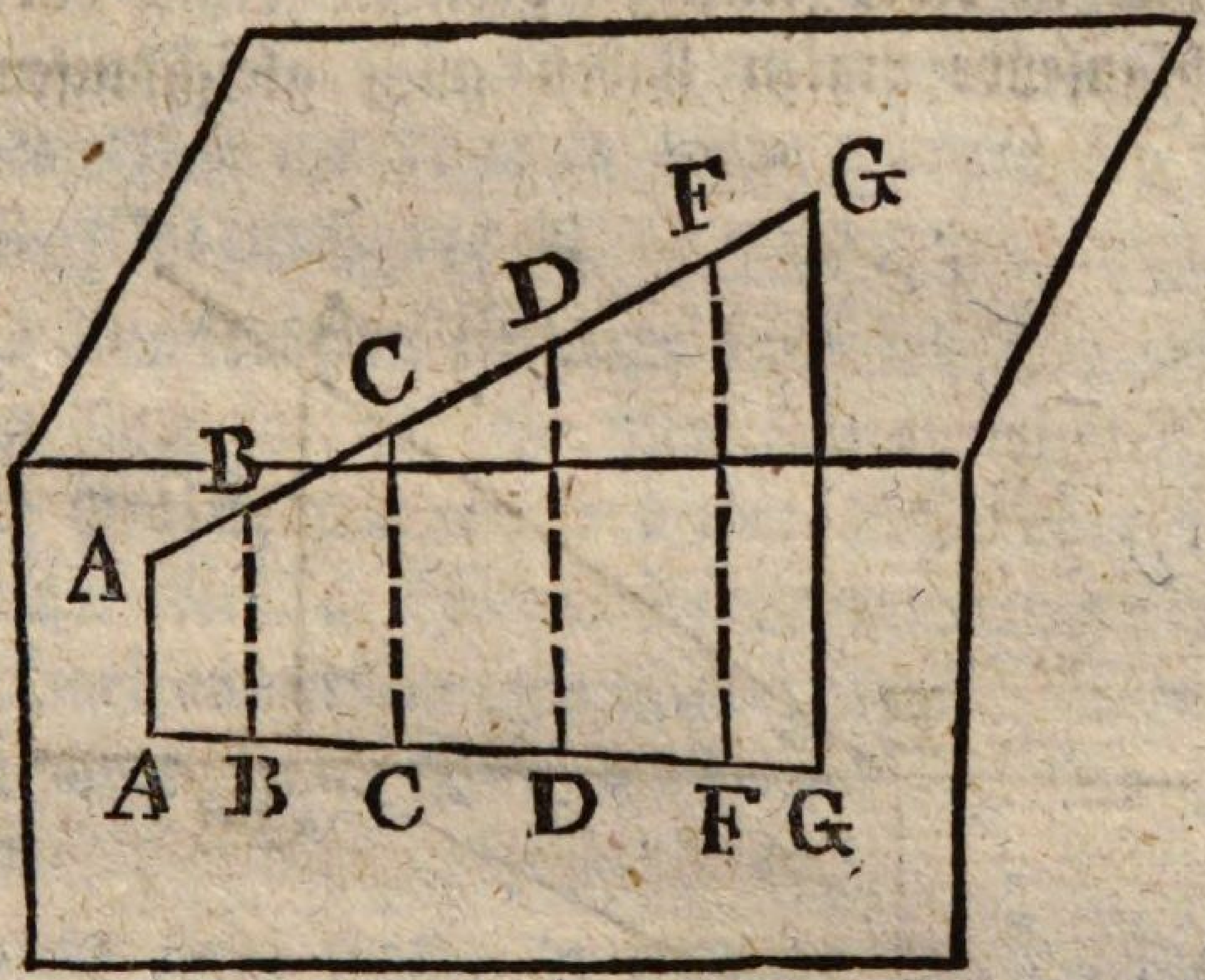
Einer der zwei Punkte befindet sich in der über D errichteten senkrechten Linie, in einer Entfernung von D, welche der Vertikaldistanz AC gleicht. Der andere befindet sich

in der über F errichteten senkrechten Linie in einer Entfernung von F, welche der Vertikaldistanz BE gleicht. Die Linie im Raume, welche die zwei dargestellten Punkte verbindet, bildet mit den zwei projektirenden Linien und mit der Linie DF ein Trapez, in welchem D und F rechte Winkel sind. Bewegt man nun dieses Trapez um die Linie DF als Axe, bis es in die Horizontalebene tritt, so fällt eine projektirende Linie in DH und die andere in FL, welche beide Linien auf DF senkrecht stehen, und den respektiven Vertikaldistanzen der dargestellten Punkte gleichen; die neue Lage dieser zwei Punkte ist also in H und in L. Die wahre Entfernung der zwei Punkte ist aber während der ganzen Bewegung unverändert geblieben; sie gleicht also der Linie HL.

Zieht man von H auf FL die senkrechte Linie HK, so ist HL die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen beide Katheten sind HK = DF und KL = FL — FK = FL - DH; man kann also die wahre Größe der Linie, welche die zwei Punkte im Raume verbindet, auch durch folgende einfache Konstruktion finden: Ueber DF erhebe man eine senkrechte Linie FG, welche dem Unterschiede beider Vertikaldistanzen gleicht, und ziehe die Hypothenuse DG, so hat man die wahre Entfernung der zwei dargestellten Punkte.

Man kann auch die wahre Größe der Linie, welche die zwei Punkte im Raume verbindet, durch eine ähnliche Konstruktion auf der Vertikalebene finden; denn die verlangte Linie bildet auch ein Trapez mit den zwei Horizontaldistanzen und der Linie, welche die zwei Vertikalprojektionen verbindet, und man kann die neue Lage suchen, welche es erhält, wenn es sich um diese letztere Linie bewegt, bis es in die Vertikalebene tritt. Uebrigens lassen sich die meisten Aufgaben der darstellenden Geometrie auf zwei Arten auflösen, weil man fast alle Konstruktionen auf den zwei Projektionsebenen wiederholen kann. Man kann hierdurch oft erfahren, ob man durch eine Konstruktion ein richtiges Resultat erhalten hat.

Es folgt aus der obigen Auflösung, daß bei Gleichheit der Vertikaldistanzen die gesuchte Linie derjenigen gleicht, welche die zwei Horizontalprojektionen verbindet. Bei gleichen Horizontaldistanzen gleicht sie der Linie, welche die zwei Vertikalprojektionen verbindet. Dies ist übrigens auch ohnedies leicht einzusehen; denn in den erwähnten Fällen ist die Linie im Raume mit einer der beiden Projektionsebenen gleichlaufend, und gleicht also ihrer Projektion auf der andern Projektionsebene.



Die projektirenden Linien AA, BB, CC der verschiedenen Punkte A, B, C ꝛc. einer geraden Linie befinden sich sämmtlich in einer einzigen Ebene.

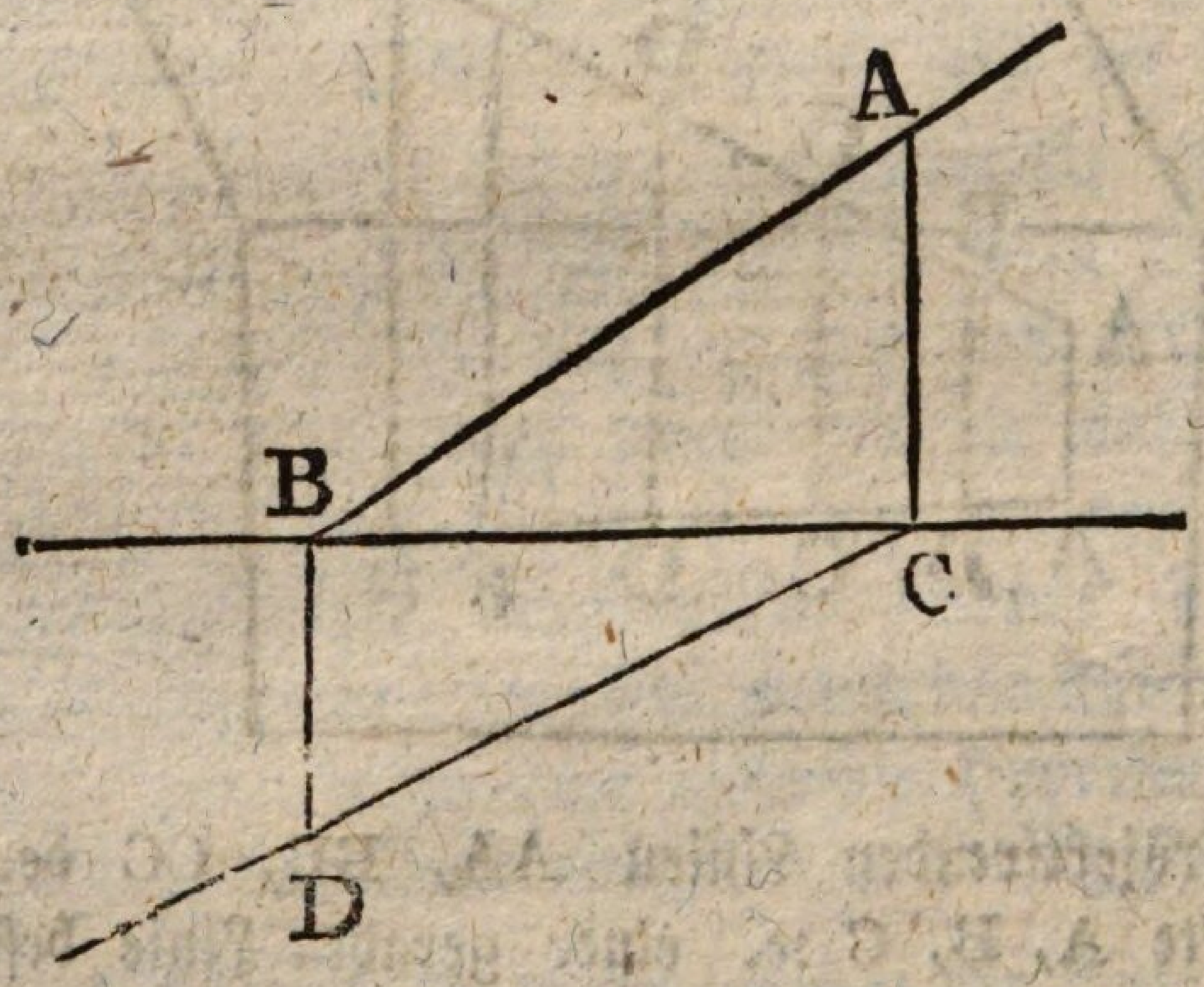
Es folgt hieraus, daß die projektirende Fläche einer geraden Linie eine Ebene ist; zwei Ebenen durchschneiden sich aber immer in einer geraden Linie; es ist also bewiesen, daß die Projektion einer geraden Linie auch eine gerade Linie ist.

Wenn die Linie im Raume mit einer Projektionsebene gleichlaufend ist, so ist ihre projektirende Fläche für die zweite Projektionsebene ebenfalls mit der ersten gleichlaufend. Wenn aber zwei gleichlaufende Ebenen von einer dritten durchschnitten werden, so sind die Durchschneidungslinien gleichlaufend; die Projektion der Linie auf der zweiten Ebene ist also auch gleichlaufend mit der Projektionsaxe.

Wenn eine gerade Linie auf einer Projektionsebene senkrecht steht, so ist ihre Projektion auf dieser Ebene nur ein einziger Punkt, nämlich der Durchschneidungspunkt der Linie mit der Projektionsebene; auf der andern Ebene aber ist die Darstellung senkrecht auf der Projektionsaxe.

Eine gerade Linie im Raume ist durch ihre Projektionen auf zwei nicht parallelen Ebenen vollkommen bestimmt; denn jede Projektion giebt eine projektirende Fläche, in welcher sich die Linie im Raume befinden muß; zwei Ebenen können sich aber nur in einer einzigen geraden Linie durchschneiden.

Gleichlaufende Linien haben auch gleichlaufende Projektionen.



Die Durchgänge einer geraden Linie zu finden, deren Projektionen AB, CD gegeben sind.

Da der Horizontaldurchgang sich auf der Horizontalebene befindet, so ist seine Vertikalprojektion auf der Projektionsaxe; sie ist aber auch auf der Vertikalprojektion der Linie; sie ist also der Punkt B, wo die Projektionsaxe von der Vertikalprojektion der Linie durchschnitten wird. Der Horizontaldurchgang selbst befindet sich demnach in der senkrechten Linie BD, die man in B über der Projektionsaxe errichtet, und zugleich auf der Horizontalprojektion des Punktes, und ist also der Punkt D, wo die Horizontal-Projektion von jener

senkrechten Linie durchschnitten wird. Man findet also den Horizontaldurchgang durch folgende Konstruktion: Man verlängere die Vertikalprojektion der Linie bis in den Punkt B, wo sie die Projektionsaxe durchschneidet, in B erhebe man eine senkrechte Linie auf der Projektionsaxe, diese durchschneidet die Horizontalprojektion der Linie in einem Punkte D, welcher der verlangte Horizontaldurchgang ist. Um den Vertikaldurchgang zu finden, verlängere man die Horizontalprojektion der Linie bis in den Punkt C, wo sie die Projektionsaxe durchschneidet, errichte in C eine senkrechte Linie auf der Projektionsaxe, diese durchschneidet die Vertikalprojektion der Linie in einem Punkte A, welcher der gesuchte Vertikaldurchgang ist.

Obige Konstruktion ist nicht ausführbar, wenn eine Projektion der Linie, z. B. die Vertikalprojektion gleichlaufend ist mit der Projektionsaxe; in diesem Falle aber hat die dargestellte Linie wirklich keinen Horizontaldurchgang, weil sie mit der Horizontalebene gleichlaufend ist. Den Vertikaldurchgang aber kann man auch hier auf die gewöhnliche Art finden.

Es giebt einen Fall, in welchem die Durchgänge nicht durch die Projektionen gefunden werden können, obwohl die dargestellte Linie die zwei Projektionsebenen durchschneidet. Dieser Fall findet Statt, wenn die zwei Projektionen auf der Projektiosaxe senkrecht stehen, und sie in einem einzigen Punkte durchschneiden. In diesem Falle sind aber die Projektionen in der That nicht hinreichend, den wahren Ort der dargestellten Linie im Raume anzugeben, weil die zwei projektirenden Flächen, durch deren Durchschneidung dieser Ort bestimmt werden soll, zwei kongruirende Ebenen sind. Man muß also außer den Projektionen die zwei Durchgänge angeben.

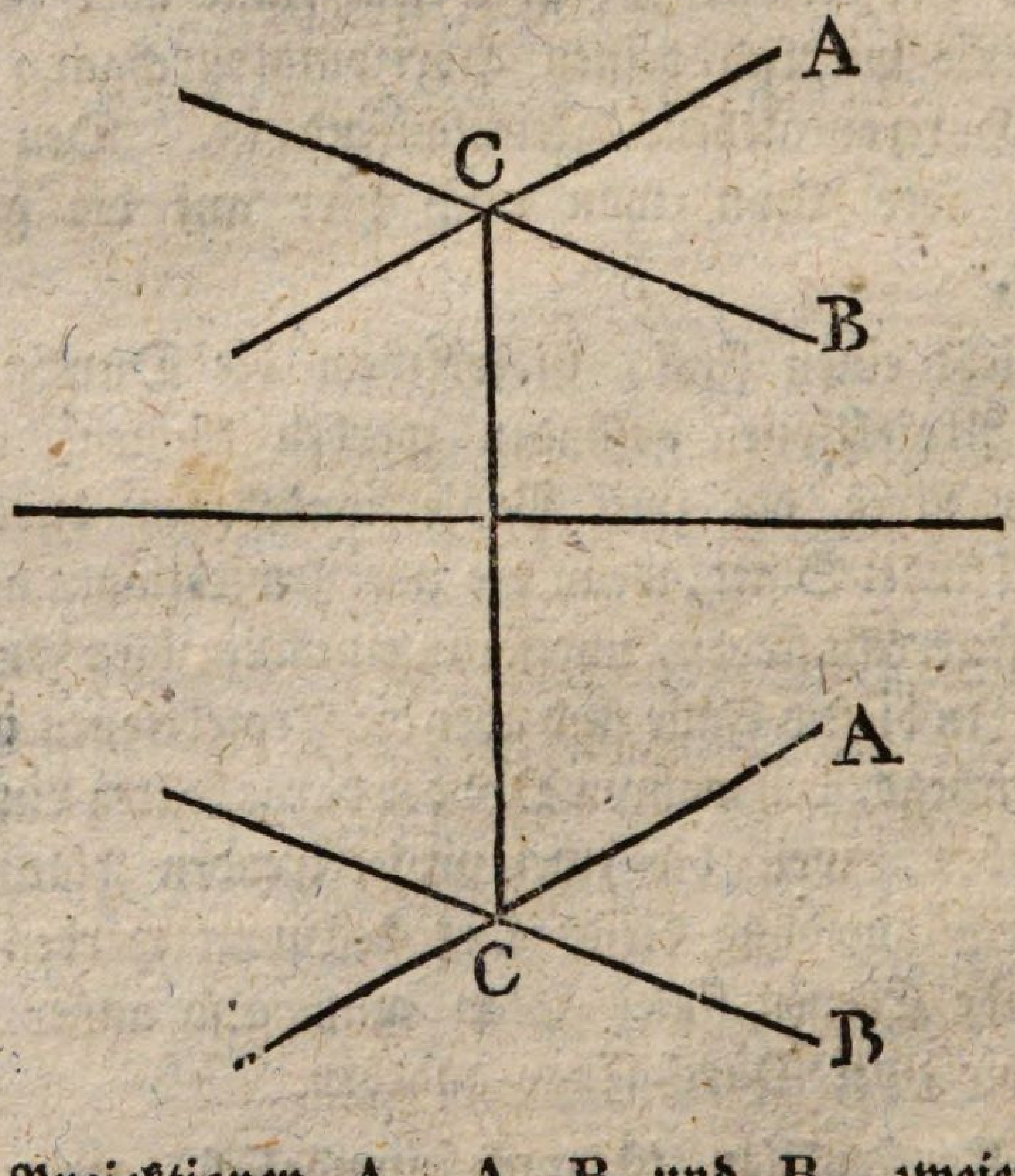
Die Konstruktion ist auch unmöglich, wenn die zwei Projektionen auf der Projektionsaxe senkrecht stehen, und sie in zwei verschiedenen Punkten durchschneiden. Solchen zwei Projektionen entspricht aber wirklich keine Linie im Raume,

indem die zwei projektirenden Flächen gleichlaufend sind, und sich also gar nicht durchschneiden.

Wenn die zwei Projektionen die Projektionsaxe in einem einzigen Punkte durchschneiden, ohne auf ihr senkrecht zu stehen, so sind beide Durchgänge in diesem Durchschneidungspunkte.

Die zwei Durchgänge A und D (s. S. 72) einer geraden Linie sind gegeben, und man soll dadurch ihre Projektionen finden.

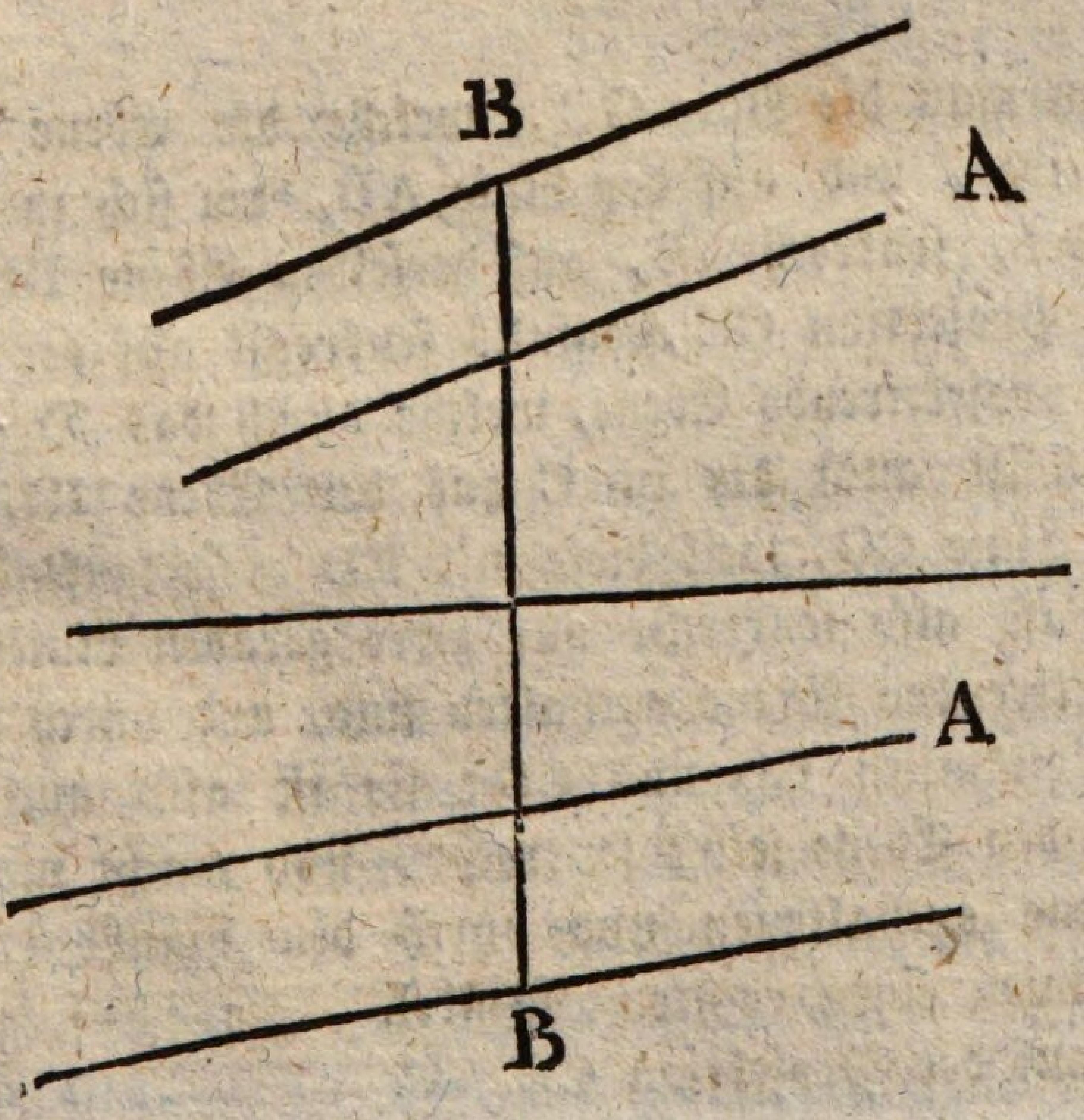
Man ziehe von A und D die senkrechten Linien AC und DB auf die Projektionsaxe, so ist B die Vertikalprojektion des Punktes D und C die Horizontalprojektion des Punktes A. Die Horizontalprojektion der Linie geht also durch die Punkte C und D und ist demnach die Linie CD. Die Vertikalprojektion geht durch die Punkte A und B und ist also die Linie AB.



Die Projektionen A, A, B und B, zweier geraden Linien sind gegeben, und man will wissen, 1) ob sie sich durchschneiden; 2) wo im Bejahungsfalle die Projektionen des Durchschneidungspunktes sind.

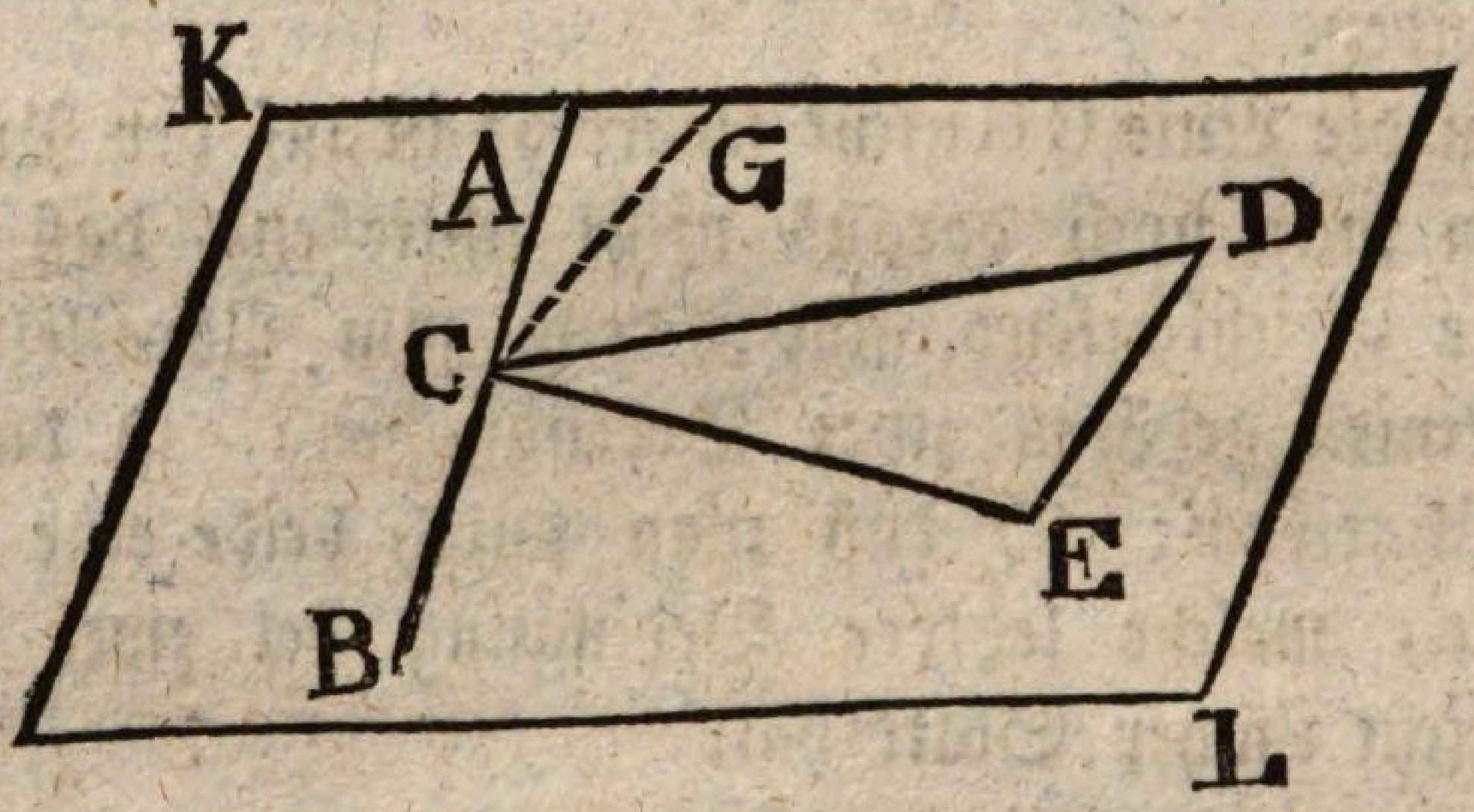
Die Projektionen eines Punktes, der sich auf einer geraden Linie befindet, sind jederzeit auf den Projektionen der Linie selbst. Da nun der etwaige Durchschneidungspunkt sich auf den zwei dargestellten Linien zugleich befindet, so kann seine Horizontalprojektion kein anderer Punkt seyn, als C, wo die zwei Horizontalprojektionen der Linien sich durchschneiden, und seine Vertikalprojektion kein anderer Punkt als C, wo sich die Vertikalprojektionen durchschneiden. Um nun zu wissen, ob die Punkte C und C wirklich die Projektionen eines Punktes im Raum seyn können, vereinige man sie durch eine gerade Linie C C, welche auf der Projektionsaxe senkrecht seyn muß, wenn die Linien im Raume sich durchschneiden.

Wenn die Linie C C nicht senkrecht ist auf der Projektionsaxe, kann man noch daraus nicht schließen, daß die Linien im Raume gleichlaufend sind; denn zum Parallelismus der geraden Linien gehören zwei Bedingungen: 1) daß sie sich nie durchschneiden; 2) daß man durch beide eine Ebene ziehen könne, welche letztere Bedingung bei zwei Linien im Raume nicht immer Statt hat.



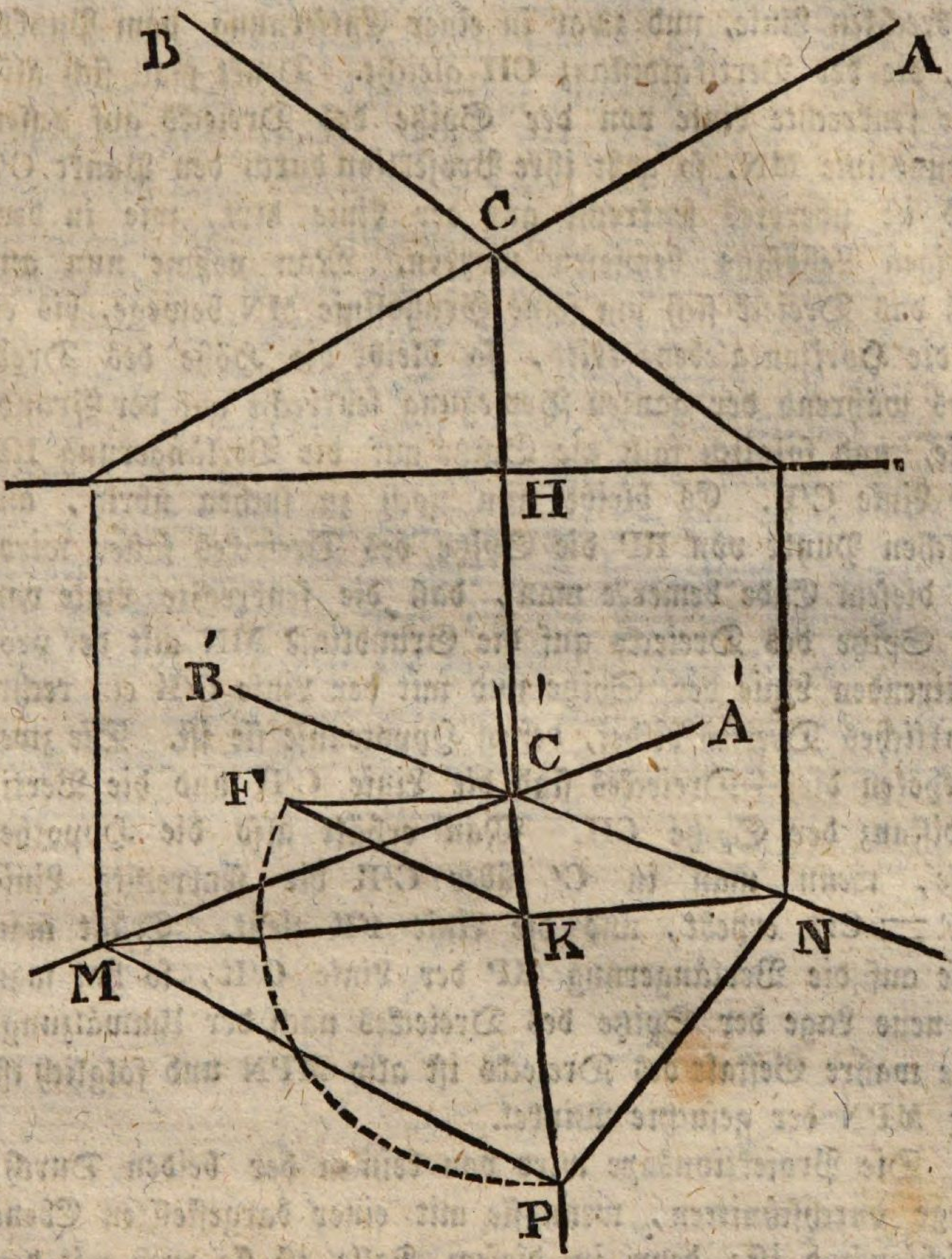
Ein Punkt und eine gerade Linie sind durch ihre Projektionen B, B, und A A gegeben, und man soll die Projektionen einer zweiten Linie finden, die durch den gegebenen Punkt geht, und mit der gegebenen Linie gleichlaufend ist.

Die Projektionen der zweiten Linie gehen durch die des Punktes, welcher in ihr enthalten ist, und sind außerdem mit den Projektionen der gegebenen Linie gleichlaufend, wie im vorigen Lehrsatze bewiesen worden ist. Man findet also die Projektionen der darzustellenden Linie, wenn man durch die Punkte B, B gleichlaufende Linien zieht mit den Projektionen A, A.



Wenn man die Linie GC, welche die Ebene KL in C durchschneidet, und auf der Linie AB, die sich in der Ebene KL befindet, senkrecht ist, auf derselben Ebene KL darstellt, so ist die Projektion CE ebenfalls senkrecht auf der Linie AB.

Die projektirende Ebene, welche durch das Dreieck DEC geht, enthält auch die in C auf der Ebene KL errichtete senkrechte Linie CG, weil diese mit ED gleichlaufend ist. Die Linie AB ist also senkrecht auf zwei geraden Linien, die in der projektirenden Ebene enthalten sind, und durch den Punkt C gehen, nämlich CG und CD; sie ist also auch auf der projektirenden Ebene selbst senkrecht, und macht mit allen in dieser Ebene enthaltenen und durch den Punkt C gehenden geraden Linien einen rechten Winkel. Sie ist folglich auch senkrecht auf der Projektion CE.



Zwei gerade Linie nsind durch ihre Projektionen A und A′, B und B′ dargestellt, und man soll den Winkel finden, den sie mit einander machen.

Man bestimme zuerst die zwei Horizontaldurchgänge M, N und verbinde dieselben durch die gerade Linie MN. Diese Letztere Linie bildet mit den zwei dargestellten ein Dreieck, dessen Spitze in C C′ dargestellt ist, wo die Projektionen der gegebenen Linien sich durchschneiden. Diese befindet sich also in einer in C′ über der Horizontalebene errichteten

senkrechten Linie, und zwar in einer Entfernung vom Punkte C′, die der Vertikaldistanz CH gleicht. Denkt man sich also eine senkrechte Linie von der Spitze des Dreiecks auf dessen Grundlinie MN, so geht ihre Projektion durch den Punkt C′, und ist überdies senkrecht auf der Linie MN, wie in dem vorigen Lehrsatze bewiesen worden. Man nehme nun an, daß das Dreieck sich um seine Grundlinie MN bewege, bis es in die Horizontalebene tritt, so bleibt die Höhe des Dreieckes während der ganzen Bewegung senkrecht auf der Grundlinie, und folglich fällt die Spitze auf die Verlängerung KP der Linie C′K. Es bleibt nun noch zu suchen übrig, auf welchen Punkt von KP die Spitze des Dreieckes fallen wird. Zu diesem Ende bemerke man, daß die senkrechte Linie von der Spitze des Dreiecks auf die Grundlinie MN mit der projektirenden Linie der Spitze und mit der Linie C′K ein rechtwinkliches Dreieck bildet, dessen Hypotenuse sie ist. Die zwei Katheten dieses Dreieckes sind die Linie C′K und die Vertikaldistanz der Spitze CH. Man erhält also die Hypothenuse, wenn man in C′ über C′K die senkrechte Linie C′F = CH erhebt, und die Linie FK zieht. Trägt man diese auf die Verlängerung KP der Linie C′K, so hat man die neue Lage der Spitze des Dreieckes nach der Umwälzung. Die wahre Gestalt des Dreiecks ist also MPN und folglich ist ∠ MPN der gesuchte Winkel.

Die Projektionsaxe wird von keinem der beiden Durchgänge durchschnitten, wenn sie mit einer dargestellten Ebene gleichlaufend ist; denn in diesem Falle ist sie auch mit den Durchgängen gleichlaufend.

Wenn eine dargestellte Ebene senkrecht steht auf einer Projektionsebene, so ist ihr Durchgang in der anderen senkrecht auf der Projektionsaxe.

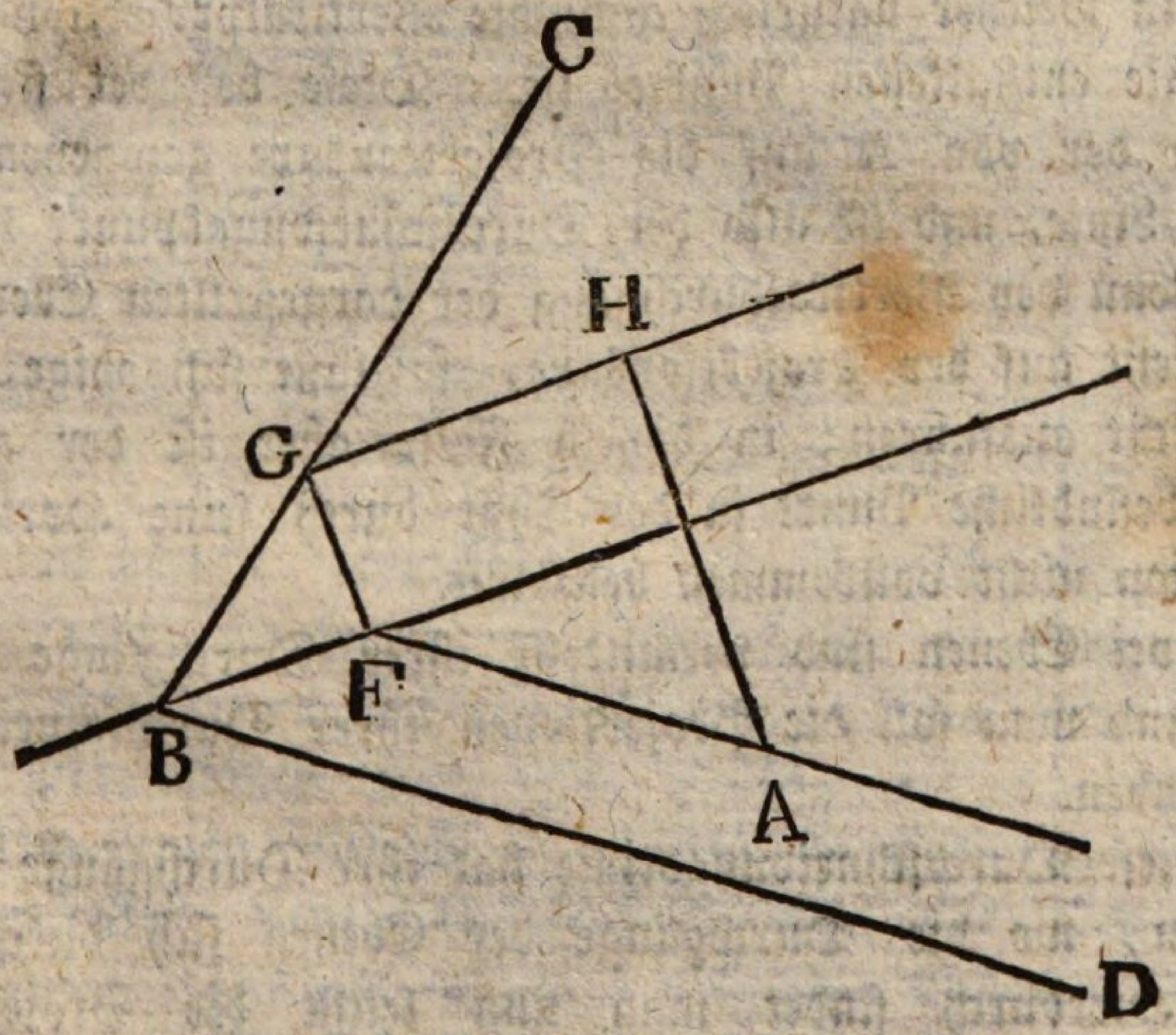
Zwei gleichlaufende Ebenen haben auch gleichlaufende Durchgänge in beiden Projektionsebenen.

Drei Punkte im Raume sind durch ihre Projektionen gegeben, und man soll die Durchgänge einer Ebene finden, welche diese drei Punkte enthält.

Da die Ebene durch die drei Punkte im Raume geht, so enthält sie auch die geraden Linien, welche diese Punkte verbinden, und ihre Durchgänge enthalten auch die Durchgänge besagter Linien. Man stelle also zuerst diese Linien vermittelst ihrer Projektionen dar, suche alsdann ihre Durchgänge auf beiden Projektionsebenen und vereinige diese durch gerade Linien, so hat man die Durchgänge der Ebenen.

Sind statt drei Punkte die Projektionen eines Punktes und einer geraden Linie gegeben, durch welche die Ebene gehen soll, so bestimme man zuerst, die Projektionen zweier Punkte, die sich in der dargestellten Linie befinden, und verfahre nachher mit den Darstellungen der drei Punkte, wie in obiger Aufgabe. Es ist aber auch hinreichend, wenn man nur die Projektionen eines einzigen Punktes bestimmt, und dafür die Durchgänge der dargestellten Linie benutzt.

Die Horizontalprojektion A eines Punktes, der sich auf einer Ebene befindet, ist gegeben, und man soll die ihr entsprechende Vertikalprojektion finden.



Die Durchgänge der Ebene seye CB und BD, und A sey die Horizontalprojektion des Punktes. Man denke sich

eine gerade Linie im Raume, die durch den Punkt geht, und mit dem Durchgang BD gleichlaufend ist. Diese Linie ist in der dargestellten Ebene ganz enthalten, und ist zugleich mit der Horizontalebene gleichlaufend, woraus folgt, daß sie mit ihrer eigenen Horizontalprojektion parallel ist. Wenn aber zwei gerade Linien mit einer dritten gleichlaufend sind, so sind sie es auch unter sich; man findet also die Horizontalprojektion der gedachten Linie, wenn man durch den Punkt A eine gerade Linie zieht, die mit dem Durchgang BD gleichlaufend ist. Erhebt man nun über F, wo die gefundene Horizontalprojektion die Projektionsaxe durchschneidet, eine senkrechte Linie, so enthält diese den Vertikaldurchgang der gedachten Linie. Dieser befindet sich aber auch im Vertikaldurchgang der Ebene BC, und ist also im Punkte G. Durch diesen Punkt geht die Vertikalprojektion der gedachten Linie, und ist dabei gleichlaufend mit der Projektionsaxe; man ziehe also durch G eine Linie, die mit der Projektionsaxe gleichlaufend ist, so hat man die Vertikalprojektion der gedachten Linie, in welcher natürlich auch die Vertikalprojektion des in der Linie enthaltenen Punktes ist. Diese befindet sich aber auch in der von A auf die Projektionsaxe gezogenen senkrechten Linie, und ist also der Durchschneidungspunkt H.

Wenn der Vertikaldurchgang der dargestellten Ebene senkrecht steht auf der Projektionsaxe, so läßt sich obige Auflösung nicht ausführen; in diesem Falle aber ist der auf der Ebene befindliche Punkt in der That durch seine Horizontalprojektion nicht vollkommen bestimmt.

Zwei Ebenen sind vermittelst ihrer Durchgänge dargestellt, und man soll die Projektionen ihrer Durchschneidungslinie finden.

Diese Durchschneidungslinie hat ihre Durchgänge in den Punkten, wo die Durchgänge der Ebenen sich durchschneiden. Hierdurch findet man nun leicht die Projektionen selbst.

Wenn die zwei dargestellten Ebenen, ohne unter sich gleichlaufend zu seyn, es mit der Projektionsaxe sind, so

sind auch ihre Durchgänge gleichlaufend mit der Projektionsaxe und unter sich selbst, und folglich kann alsdann die Durchschneidungslinie nicht durch obige Auflösung gefunden werden. In diesem Falle muß man sich einer dritten Ebene, welche weder mit den zwei gegebenen, noch mit der Projektionsaxe gleichlaufend ist, als Hülfsebene bedienen. Sie durchschneidet jede der zwei dargestellten Ebenen in einer geraden Linie, und diese durchschneiden sich wiederum in einem Punkt, dessen Projektionen, in denen der Durchschneidungslinie der zwei dargestellten Ebenen liegen, und da diese überdies gleichlaufend mit der Projektionsaxe sind, so hat ihre Bestimmung weiter keine Schwierigkeit.

Die Durchgänge einer Ebene zu finden, die von einer dargestellten Linie auf eine dargestellte Ebene senkrecht gezogen wird.

Man nehme die Projektionen eines beliebigen Punktes auf der dargestellten Linie, nnd bestimme die Projektionen einer geraden Linie, die von demselben auf die Ebene senkrecht gezogen wird, durch diese Linie und die dargestellte denke man sich eine Ebene und bestimme ihre Durchgänge, so hat man die Darstellung der verlangten Ebene.

Zwei gerade Linien sind vermittelst ihrer Projektionen dargestellt und man soll ihren kürzesten Abstand bestimmen.

Es ist leicht einzusehen, daß die kürzeste Linie, die ihre beiden Endpunkte auf zwei Linien im Raum hat, auf diesen zwei Linien senkrecht seyn müsse. Man muß also hier die Projektionen einer Linie suchen, die auf den zwei dargestellten Linien senkrecht ist, und sie durchschneidet. Um diese zu erhalten, ziehe man durch jede Linie eine Ebene, die mit der zweiten gleichlaufend ist, und eine Ebene, die auf dieser gezogenen Ebene senkrecht steht, und bestimme dann die Projektionen der Liuie, in welcher die zwei letztern Ebenen sich durchschneiden. Man bestimme nun die Projektionen der

Punkte, in welcher die dargestellten Linien von dieser durchschnitten werden, und suche die Entfernung der Durchschneidungspunkte, so hat man den verlangten kürzesten Abstand der dargestellten Linien.

Neunter Abschnitt.

Von der perspektivischen Darstellung.

Die perspektivische Darstellung unterscheidet sich von der andern blos darin, daß die Projektionslinien in einen einzigen Punkt zusammenlaufen, statt gleichlaufend und auf der Projektionsebene senkrecht zu seyn.

Der Vereinigungspunkt sämmtlicher Projektionslinien ist der Ort, aus welchem der Gegenstand gesehen wird, und heißt daher der Augepunkt, und die Projektionslinien stellen die Lichtstrahlen vor, welche vom Gegenstand nach dem Auge geschickt werden, und durch deren Wirkung auf die Gesichtsorganen der Gegenstand wahrgenommen wird. Zur Projektionsebene wählt man eine Ebene, die sich zwischen dem Gegenstande und dem Auge befindet, und welche alle Projektionslinien in Punkten durchschneidet. Diese Punkte bilden zusammen eine Figur, und diese ist die perspektivische Darstellung des Gegenstandes.

Wenn es möglich wäre, die perspektivische Darstellung eines Gegenstades genau zu zeichnen, jedem Punkte derselben die Farbe und den Grad der Beleuchtung des Punktes zu geben, von welchem die Projektionslinie ausgeht, so würde die Darstellung die nemliche Wirkung auf das Auge machen, wenn es sich im Augepunkt befindet, als der Gegenstand selbst; denn

der Eindruck, den die Lichtstrahlen auf das Auge machen, leidet keine Veränderung, wenn jeder Lichtstrahl, ohne Richtung und Farbe zu verändern, kürzer wird; dieser Fall findet aber bei einer genauen perspektivischen Darstellung Statt, wo jeder Punkt einen Lichtstrahl nach dem Auge schickt, der an Richtung und Farbe ganz dem gleich kommt, der vom dargestellten Punkte selbst ausgeht, und nur um etwas kürzer ist. Die Perspektivische Darstellung eines Gegenstandes verhält sich also zu der andern gleichsam wie Täuschung zur Wirklichkeit. Sie hat nicht zum Zweck, eine Zeichnung zu entwerfen, wodurch man alle Theile eines Gegenstandes, ihrer Größe und ihrer gegenseitigen Neigung nach, genau zu erkennen im Stande ist, sondern dem Auge ein Bild von einem abwesenden oder noch nicht verfertigten Gegenstande vorzuhalten, um es zu ergötzen, oder ihm eine deutliche Vorstelluug vom Gegenstande beizubringen.

Ein Gegenstand, der perspektivisch dargestellt werden soll, muß, seiner Gestalt und seiner Lage nach, gegeben seyn, dies kann aber nicht anders geschehen, als durch die gewöhnliche Darstellung auf zwei Projektionsebenen. Diese können zwar mit einander einen beliebigen Winkel machen, jedoch sind alle Konstruktionen viel einfacher, wenn sie sich senkrecht durchschneiden.

Die gewöhnliche Darstellung muß auf zwei Ebenen geschehen, weil man nur dadurch die eigentliche Entfernung zweier dargestellten Punkte finden kann. Die perspektivische, welche blos Täuschung zum Zwecke hat, geschieht nur auf einer Ebene und zwar gewöhnlich auf der Vertikalebene, welche sich also zwischen dem Gegenstande und dem Auge befinden muß. Da aber der darzustellende Gegenstand sich hinter der Vertikalebene befindet, so ist seine Horizontalprojektion nicht wie gewöhnlich unter, sondern über der Projektionsaxe; die Horizontalprojektion des Augepunktes hingegen ist unter derselben. Um nun einen gegebenen Punkt perspektivisch darzustellen, projektire man den Lichtstrahl, den er nach dem Auge

schickt, auf die zwei Projektionsebenen und suche den Vertikaldurchgang, so hat man seine perspektivische Darstellung.

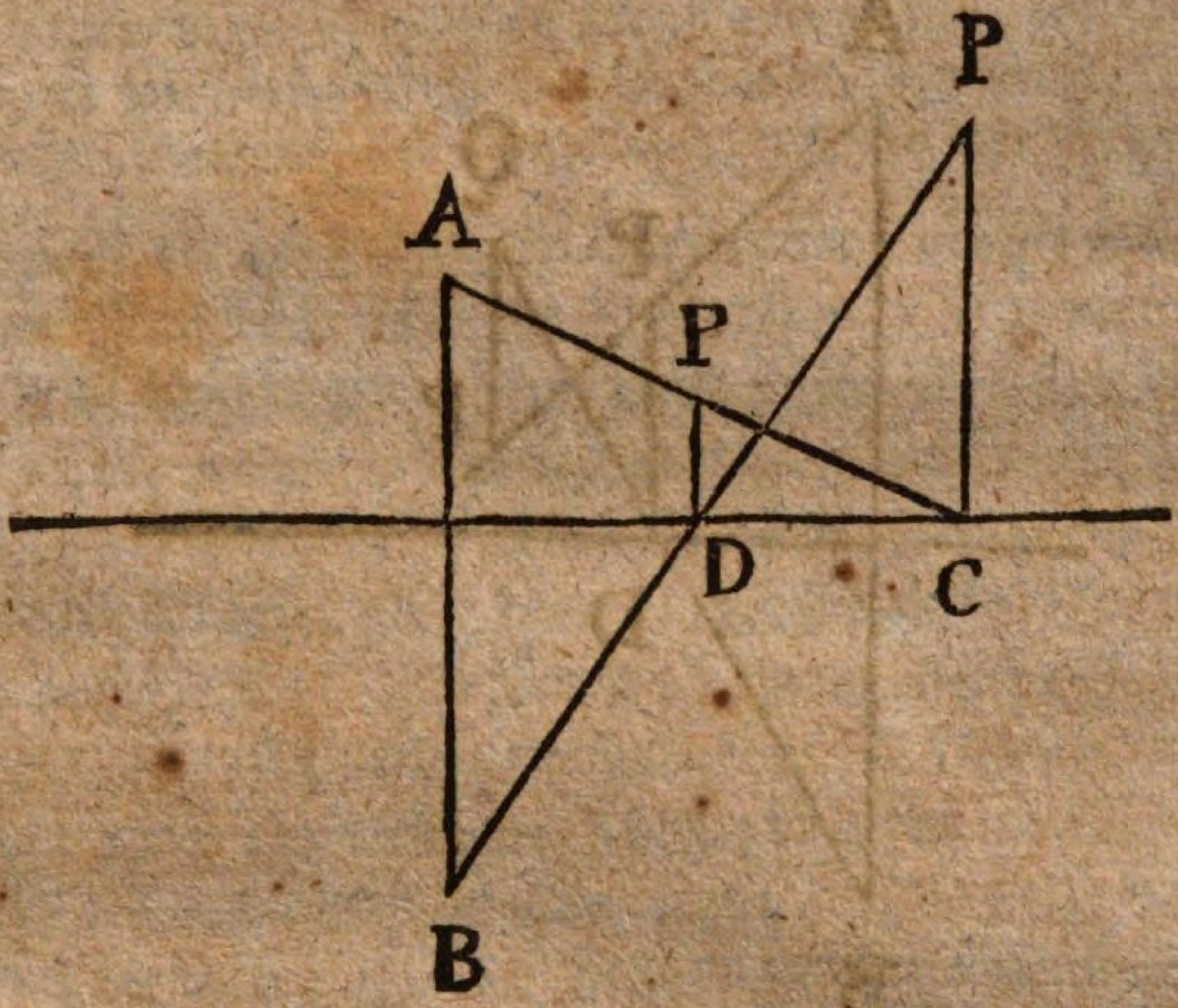
Eine gerade Linie ist in Perspektiv auch eine gerade Linie, nemlich der Vertikaldurchgang einer Ebene, welche durch das Auge und die darzustellende Linie geht, und in welcher alle Lichtstrahlen enthalten sind; geht sie aber durch das Auge, so ist ihr Perspektiv ihr Vertikaldurchgang und folglich ein Punkt. Ist eine gerade Linie gleichlaufend mit der Vertikalebene, so ist sie auch gleichlaufend mit ihrer perspektivischen Darstellung; ist sie auch gleichlaufend mit der Horizontalebene, so ist ihre Darstellung gleichlaufend mit der Projektionsaxe.

Die Darstellung einer geraden Linie, welche auf der Vertikalebene senkrecht ist, geht durch die Vertikalprojektion des Auges; denn die Ebene, welche alle Lichtstrahlen enthält, geht durch die dargestellte Linie selbst, und durch die projektirende Linie des Auges, welche mit ihr gleichlaufend ist; ihr Vertikaldurchgang, oder das Perspektiv der Linie geht also auch durch die Vertikalprojektion des Auges.

Das Perspektiv einer begränzten geraden Linie, die mit der Vertikalebene gleichlaufend ist, ist stets kleiner als die gerade Linie selbst: denn die Linie bildet mit den Lichtstrahlen, welche von ihren beiden Endpunkten nach dem Auge gehen, ein Dreieck, dessen Grundlinie mit dem Perspektive gleichlaufend ist. Die perspektivische Darstellung verhält sich also zu der Linie selbst, wie die Entfernung des Auges von irgend einem Punkte der Darstellung, zu seiner Entfernung vom dargestellten Punkte selbst. Es folgt hieraus, daß wenn mehrere mit der Vertikalebene gleichlaufende Linien durch einen Punkt gehen, ihre perspektivischen Darstellungen von gleicher Größe sind. Ein Kreis, dessen Ebene mit der Vertikalebene gleichlaufend ist, hat also zur perspektivischen Darstellung einen andern Kreis, der nur mit einem kleineren Radius beschrieben wird. Wenn die Ebene des Kreises nicht mit der Vertikalebene gleichlaufend ist, so ist die perspektivische Darstellung

zwar im Allgemeinen eine Ellipse, jedoch läßt sich für jeden gegebenen Kreis ein Augepunkt finden, von dem aus der Gegenstand gesehen werden muß, wenn er auch in Perspektiv ein Kreis seyn soll.

Das Perspektiv eines Punktes zu finden, der sich auf der Horizontalebene befindet, wenn die Projektionen des Augepunktes gegeben sind.

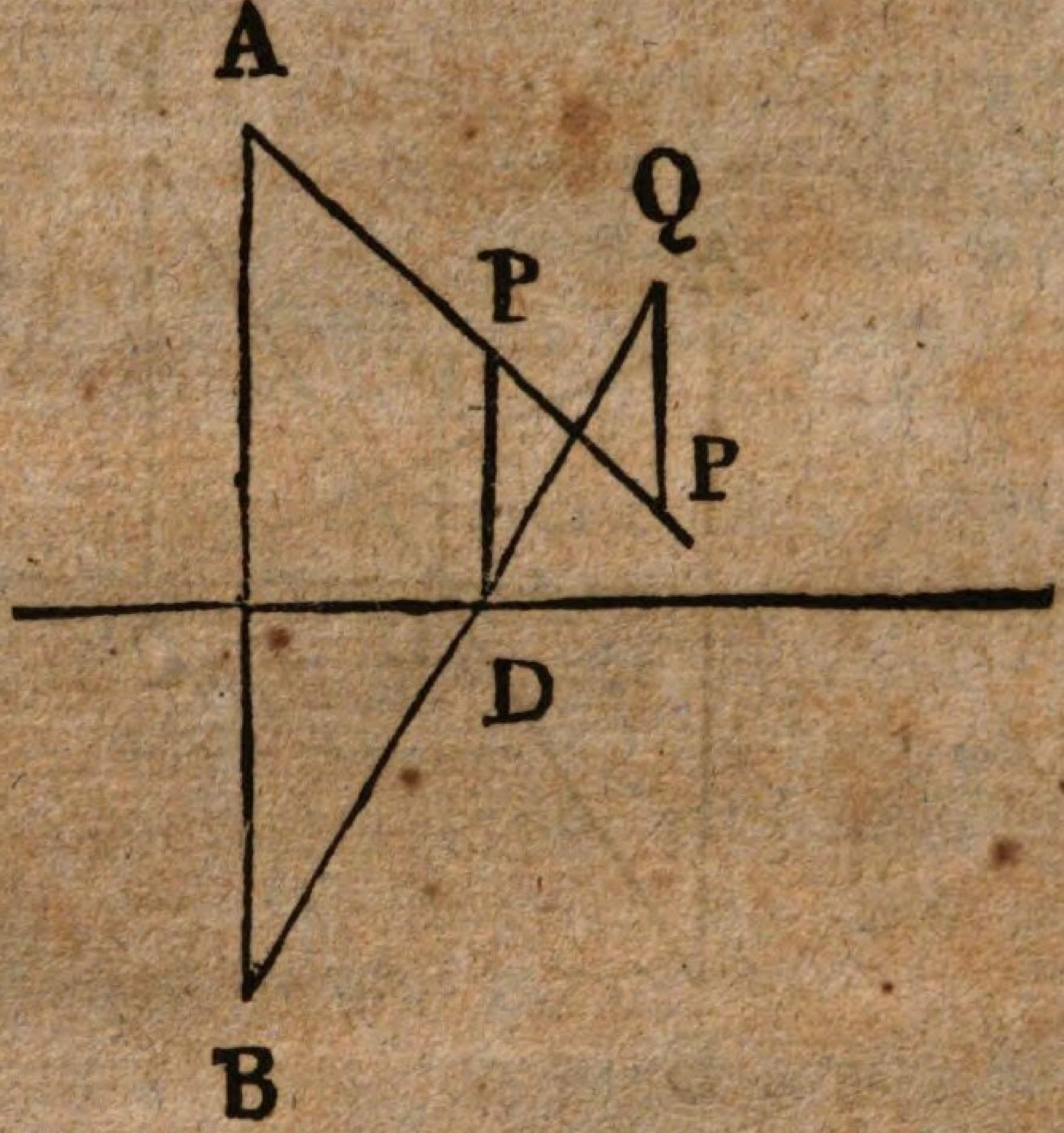


Es sey P der Punkt, welcher sich hinter der Vertikalebene befindet, A die Vertikalprojektion des Augepunktes und B dessen Horizontalprojektion. Die Vertikalprojektion des Punktes ist in C auf der Projektionsaxe, seine Horizontalprojektion ist in P selbst. Die Projektionen des Lichtstrahles, der vom Punkte P nach dem Augepunkte geht, sind also die Linien AC und PB. Man findet nun auf die gewöhnliche Art, indem man über D, wo die Horizontalprojektion des Lichtstrahls die Projektionsaxe durchschneidet, eine senkrechte Linie erhebt, den Vertikaldurchgang des Lichtstrahls, welcher das verlangte Perspectiv des Punktes P ist.

Man ist nun im Stande, jede auf der Horizontalebene gezeichnete Figur in Perspektiv zu bringen. Ist sie von lauter geraden Linien eingeschlossen, so wiederhole man das obige Ver-

fahren für jede Spitze, und verbinde dann die perspektivirten Punkte durch gerade Linien; ist aber ihr Umfang eine krumme Linie, so suche man die perspektivische Darstellung einer großen Anzahl von Punkten, und vereinige die perspektivirten Punkte durch einen Zug mit freier Hand.

Das Perspektiv eines Punktes im Raume zu finden, wenn seine Projektionen so wie die des Augepunktes gegeben sind.



Es seyen A und B die Projektionen des Augepunktes, P die Vertikal- und Q die Horizontalprojektion des Punktes im Raume. Die Vertikalprojektion des Lichtstrahles ist die Linie AP und die Horizontalprojektion die Linie BQ. Diese durchschneidet die Projektionsaxe in D. Erhebt man über diesen Punkt die senkrechte Linie DP, so findet man den Punkt P, welcher der Vertikaldurchgang des Lichtstrahls und zugleich das gesuchte Perspektiv ist.

Man ist nun im Stande, jede Figur in Perspektiv zu bringen, deren Projektionen gegeben sind. Es ist übrigens überflüssig, dies hier durch mehrere Beispiele zu zeigen, denn in jedem vorkommenden Falle ist die Konstruction nur eine häufige Wiederholung der zwei letztern Auflösungen, und die etwaigen Erleichterungen geben sich durch Uebung gleichsam von selbst.

Ein wichtiger Gebrauch wird von der perspektivischen Dar-

stellung gemacht bei der Zeichnung der Planiglobien. Man nennt so perspektivische Darstellungen der halben Oberfläche der Erde auf Kreisen, die durch ihren Mittelpunkt gehen, bei welchen man den Endpunkt des Radius der Sphäre, der auf dem Kreise senkrecht steht, als Augepunkt nimmt. Da es unmöglich ist, jeden bedeutenden Punkt der Erdfläche besonders in Perspektiv zu bringen, so begnügt man sich damit, eine große Anzahl von Parallelen und Meridianen darzustellen, und die übrigen wichtigen Punkte dahin zu setzen, wohin sie, vermöge ihrer geographischen Lage, d. h. ihrer Länge und Breite, gehören. Man kann als Projektionskreis den Aequator, oder einen Meridian oder den Horizont eines gegebeuen Punktes der Erde wählen.

Sowohl die perspekivische Darstellung, als die gewöhnliche haben den Mangel, daß die Projektionen der verschiedenen Theile eines Gegenstandes sich nicht gegen einander verhalten wie die Theile selbst. Diese Unvollkommenheit ist besonders nachtheilig bei den Planiglobien, indem dadurch oft Länder von gleichem Flächeninhalt durch verschiedene Größen und Länder von verschiedenem Flächeninhalt durch gleiche Größen dargestellt werden. Bei der gewöhnlichen Darstellung gleicht die Projektion einer ebenen Figur der Figur selbst multiplicirt mit einer Zahl die von ihrer Neigung gegen die Projectionsebene abhängt. Ist die Figur mit der Projektionsebene gleichlaufend, so gleicht sie ihrer Projektion; ist sie aber auf der Projektionsebene senkrecht, so ist die Projektion eine gerade Linie und hat also gar keinen Flächeinhalt, wodurch es ganz unmöglich wird, durch die Betrachtung einer einzigen Projektion das gegenseitige Verhältniß der verschiedenen Theile eines Gegenstandes zu erkennen, der nicht in einer Ebene enthalten ist. Bei der perspektivischen Darstellung ist das Mißverhältniß nicht so groß, denn 1° ist die Darstellung immer kleiner als der Gegenstand selbst, 2° ist sie niemals eine gerade Linie, wenn der Theil nicht in einer Ebene enthalten ist, die durch den Augepunkt geht. Bei den Planiglobien findet dieser Fall niemals Statt, und darum verdient auch die perspektivische Darstellung den Vorzug.

Es ist nicht gleichgiltig, welchen Punkt man zum Auge-

punkte wählet. Seine Entfernung vom Gegenstande darf nicht zu groß und nicht zu klein seyn. Ist sie zu groß, so könnte der scheinbare Durchmesser des Gegenstandes oder der Winkel, den die zwei von den Endpunkten des Gegenstandes nach dem Auge geschickten Lichtstrahlen mit einander machen, kleiner als etwa eine Minute seyn, in welchem Falle das Auge kein deutliches Bild empfängt. Ist der Augepunkt zu weit vom Gegenstande entfernt, so könnte der scheinbare Durchmesser größer werden, als 60—70° und alsdann ist es unmöglich, den Gegenstand mit einem Blicke zu übersehen. Man wählt daher den Augepunkt oft so, daß der scheinbare Durchmesser 60° sey.

Eine perspektivische Darstellung ist nur dann vollkommen, wenn jeder Punkt die Farbe des durchgehenden Lichtstrahles hat. Die hierauf Bezug habenden Regeln bilden eine Kunst, von der hier nichts vorgetragen werden kann. Uebrigens sind solche vollkommnen Darstellungen nicht von allen Körpern möglich. Ganz durchsichtige Körper lassen den auf sie fallenden Lichtstrahlen freien Durchgang, ohne sie einzusaugen und dem Auge nur Strahlen von einer einzigen Farbe zuzusenden; sie wirken daher gar nicht auf das Auge und können blos als geometrische Gegenstände dargestellt werden. Ganz polirte Körper lassen zwar den Lichtstrahlen keinen freien Durchgang aber sie zerlegen sie nicht in Farben und werfen sie nicht in allen Richtuugen zurück, sondern in einer einzigen, die mit der Oberfläche denselben Winkel macht als der einfallende Lichtstrahl. Trifft der zurückgeworfene Lichtstrahl das Auge, welches nicht immer geschieht, so macht er die nemliche Wirkung auf die Sehorganen, als wenn er direkt vom leuchtenden Punkte käme. Ein vollkommen polirter Körper bietet also dem Auge bloß das Bild der Gegenstände dar, von denen er die Lichtstrahlen empfängt, und kann deshalb auch nicht perspektivisch dargestellt werden. Indessen giebt es keinen vollkommen durchsichtigen oder vollkommen polirten Körper in der Natur. Sie wirken alle durch sich selbst auf das

Auge, indem sie wenigstens einige der auf sie fallenden Lichtstrahlen zerlegen. Hingegen giebt es auch keinen, der alle auf ihn fallende Lichtstrahlen zerlegt; denn einige werden immer ganz zurückgeworfen, so daß sie in ihrer neuen Richtung denselben Winkel mit der Oberfläche des Gegenstandes machen, als der einfallende Lichtstrahl. Diese ganz zurückgeworfenen Lichtstrahlen treffen nicht alle das Auge, sondern nur derjenige, in dessen Richtung das Auge sich gerade befindet. Der Punkt, von dem dieser Lichtstrahl ausgeht, bietet dem Auge das Bild des leuchtenden Gegenstandes dar, und zeigt sich dadurch selbst in einigem Glanze; man nennt ihn den leuchtenden Punkt. Obgleich er im allgemeinen nicht durch die Hülfe der Theorie gesucht werden darf, so ist doch die geometrische Konstruktion, durch welche man ihn erhält, wenn die Oberfläche des Körpers eine Ebene ist, so einfach, daß es gut ist davon Gebrauch zu machen. Sie besteht darin, daß man vom leuchtenden Punkt eine senkrechte Linie ziehet auf die Oberfläche, sie um ihre eigene Größe verlängert und den Endpunkt dieser Linie mit dem Augepunkte durch eine gerade Linie verbindet, welche die Oberfläche im leuchtenden Punkte durchschneidet. Diese Regel kommt übrigens bei so vielen andern Gelegenheiten vor, daß es überflüssig ist, sie hier zu beweisen.

Zehnter Abschnitt.

Von den durch Ebenen begränzten Körpern.

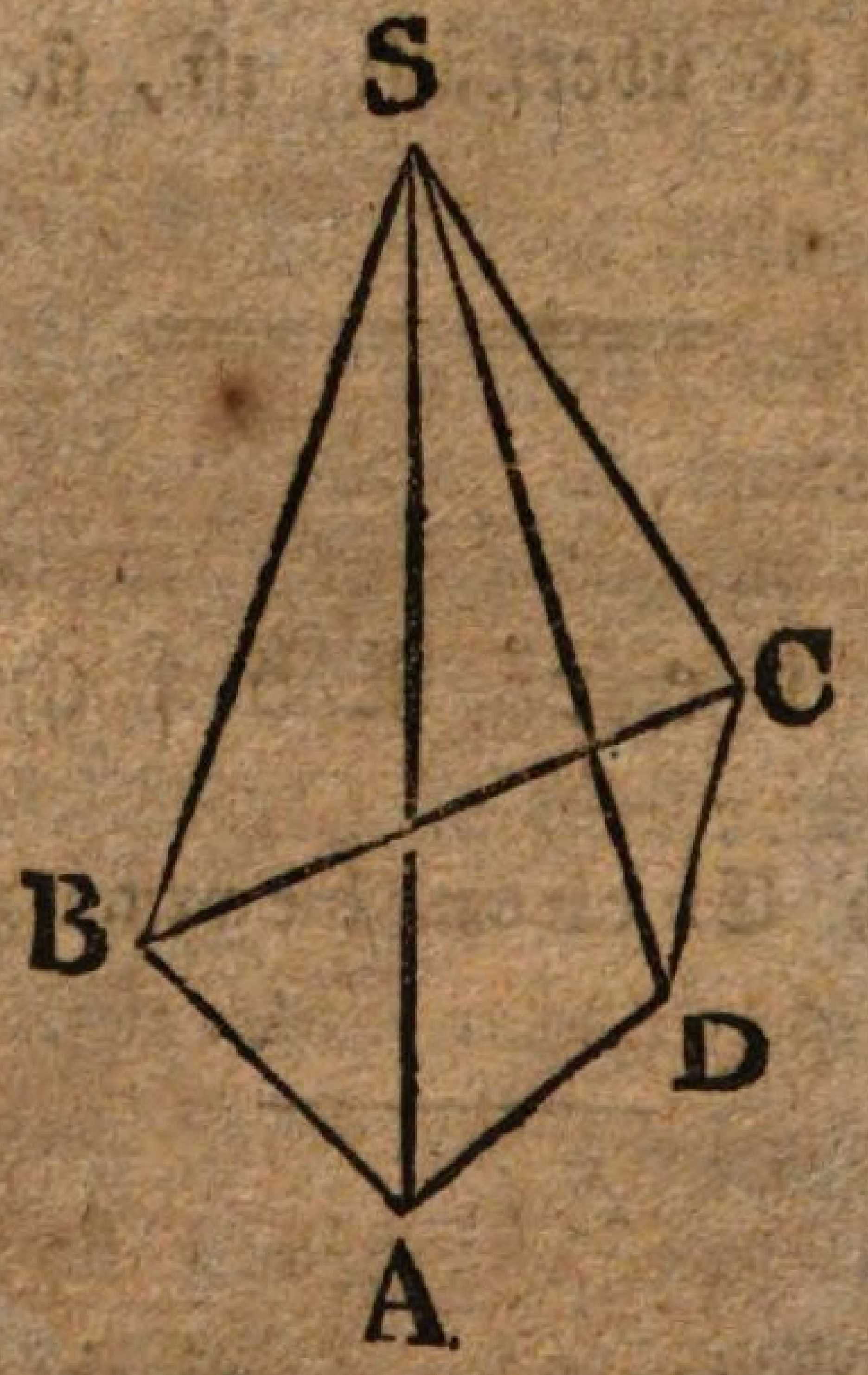
Eine Stange oder eine Latte ist ein Körper, dessen Länge unbestimmt ist, und dessen ebene Seiten durch gerade, parallele Linien begränzt sind, die man Kanten nennt. Durch-

schneidet man eine solche Stange oder Latte durch zwei parallele Ebenen, die mit den Kanten einen rechten Winkel bilden, so erhält man ein gerades Prisma, sonst aber ist es ein schiefes Prisma. Sind die zwei durchschneidenden Ebenen nicht parallel, so erhält man ein abgestumpftes Prisma. Ein Prisma ist dreieckig, viereckig ꝛc., je nachdem die Latte oder Stange drei, vier ꝛc. Kanten hat.

In der Optik gebraucht man ein dreieckiges Prisma zur Zersetzung des Lichtes. Das Dachwerk bei regelmäßigen Gebäuden bildet gewöhnlich ein gerades oder ein abgestumpftes dreieckiges Prisma. Die Stöße von Bomben- und Kanonenkugeln haben auch häufig die Gestalt eines abgestumpften dreieckigen Prisma's, wodurch die Anzahl der Kugeln eines Stoßes leicht berechnet werden kann.

Ein viereckiges Prisma heißt auch ein Parallelepipedon. Sind die sechs Flächen, welche ein Parallelepipedon einschließen, lauter Rechtecke, so heißt es ein rechtwinkliges Parallelepipedon; sind alle diese sechs Flächen Quadrate, so heißt es ein Cubus (Würfel).

Balken, Quadratpfeiler und Pilaster sind rechtwinklige Parallelepipede; auch die Natur erzeugt in den Crystallen sowohl diese als viele andere geometrische Gestalten.

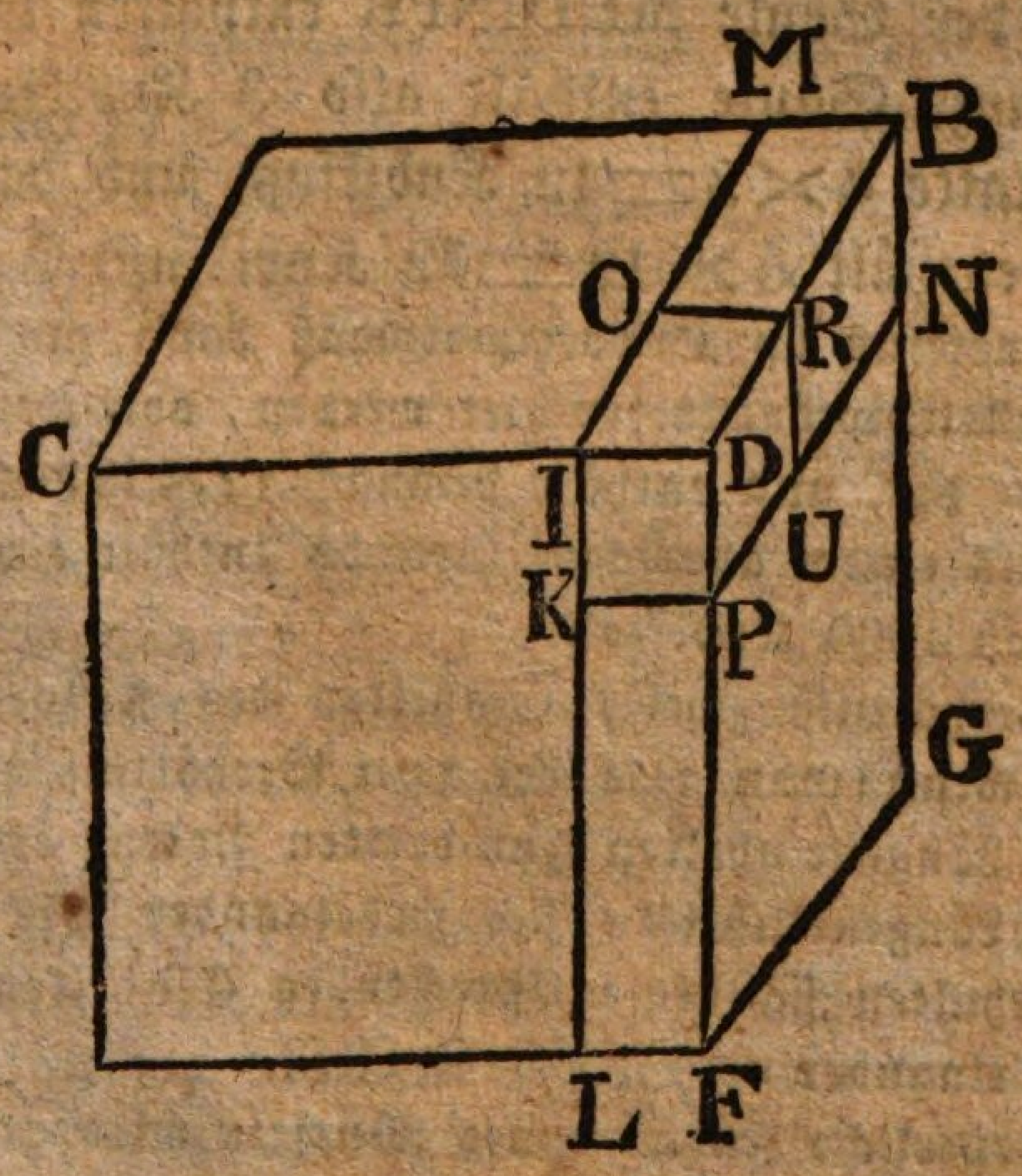


Wenn die Spitzen vieler Dreiecke SAB, SCD, SBC ꝛc. in einem Punkte S zusammentreffen, und ihre Grundlinien

AB, BC, CD, AD ꝛc. ein Vieleck bilden, so ist der zwischen diesen Dreiecken und dem durch ihre Grundlinien gebildeten Vielecke enthaltene Körper eine Pyramide. Der Punkt S ist der Scheitel und das Vieleck ABCD die Grundfläche der Pyramide. Eine Pyramide ist drei-, vier-, fünfeckig ꝛc., je nachdem die Grundfläche ein Drei-, Vier-, Fünfeck ꝛc. ist. Eine Pyramide ist regulär, wenn die Grungfläche ein reguläres Vieleck ist, und der Scheitel sich auf der senkrechten Linie befindet, welche über dem Mittelpunkt der Grundfläche erhoben wird.

Der gemeinschaftliche Name aller von Ebenen eingeschlossenen Körper ist vielseitiger Körper oder Polyeder. So wie man jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen kann, so kann man, wenigstens im Gedanken, jeden Polyeder in Pyramiden zerlegen, indem man einen beliebigen Punkt im Innern des Polyeders mit allen Ecken desselben verbindet und durch alle auf diese Weise gebildete Dreiecke Ebenen gehen läßt.

So wie man sich des Quadrates als Flächeneinheit bedient, so gebraucht man den Würfel zur Einheit des Körpermaaßes, und zwar nimmt man dazu einen Würfel, dessen Seite der Längeneinheit gleicht.



Der körperliche Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons wird gefunden, wenn man die Zahlen, welche ausdrücken, wie viel Mal die Längeneinheit in drei Kanten BD, CD, FD enthalten ist, die in einem Punkte D zusammenlaufen, multiplcirt. Solche drei Kanten nennt man die drei Dimensionen des Parallelepipedons, oft auch Länge, Breite und Höhe (Dicke, Tiefe ꝛc.) Ist also z. B. CD = 6′, DF = 4′, DB = 3′, so ist der körperliche Inhalt des Parallelepipedons = 6 × 4 × 3 = 72 Kubikfuß.

Um dies zu beweisen, mache man DI = 1′ und schneide durch mit einer Ebene, die mit der Fläche BDFG parallel ist, so erhält man eine Platte, welche zwischen der durchschneidenden Ebene MIL und der Fläche BDFG enthalten ist, und da CD = 6′, so wird das ganze Parallelepipedon in sechs solche Platten zerlegt werden können. Macht man ferner IK = DP = 1′ und schneidet mit einer Ebene KPN durch, die mit der Fläche IDBM parallel ist, so erhält man dadurch eine Säule MBDINPK, und da DF = 4′, so wird die Platte vier solche Säulen enthalten. Macht man endlich IO = DR = 1′ und schneidet mit einer Ebene durch, die mit IDPK parallel ist, so erhält man einen Kubikfuß KIDPORU, welcher drei Mal in der Säule MBDINPK enthalten ist, weil BD = 3′; die ganze Säule enthält also 3 Kubikfuß; folglich enthält die Platte 4 × 3 = 12 Kubikfuß, und das ganze Parallelepipedon enthält 6 × 12 = 72 Kubikfuß.

Ein Kubikfuß im Duodecimalmaaß kann als ein rechtwinkliges Parallelepipedon betrachtet werden, von welchem jede Dimension 12″ hat, und enthält demnach 12 × 12 × 12 = 1728 Kubikzoll. Aus einem ähnlichen Grunde enthält ein Kubikfuß im Dezimalmaaß 1000 Kubikzoll.

Das Verhältniß zweier Einheiten des Körpermaaßes wird gefunden, wenn man jede der zwei Verhältnißzahlen der entsprechenden Längeneinheiten zur dritten Potenz erhebt. Wenn z. B. zwei Längeneinheiten sich zu einander wie 4 : 7 verhalten, so verhalten sich die entsprechenden Einheiten des Körpermaaßes zu einander $= 4^3 : 7^3 = 64 : 343$.

Der körperliche Inhalt eines Würfels wird gefunden, wenn man die Seite zur dritten Potenz erhebt, und umgekehrt, wenn

der körperliche Inhalt eines Würfels gegeben ist, findet man die Seite, wenn man aus dem gegebenen körperlichen Inhalte die Kubikwurzel zieht.

Das Produkt zweier Dimensionen eines rechtwinkligen Parallelepipedons kann auch als die Grundfläche desselben betrachtet werden; man findet also auch den körperlichen Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.

Wenn der körperliche Inhalt und die Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedons gegeben sind, so findet man die Höhe, wenn man den körperlichen Inhalt durch die Grundfläche dividirt, und so auch umgekehrt.

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons, wenn die drei Dimensionen 6′ 8″, 5′ 7″, 9′ 4″ im Duodecimalmaaß sind?

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Würfels, dessen Seite 9′ 5″ im Dezimalmaaß hat?

Wie groß ist die Seite eines Würfels, dessen körperlicher Inhalt 76 Kubikfuß 378 Kubikzoll im Dezimalmaaß ist?

Wie viel Frankfurter Kubikfuß sind 345 Berliner Kubikfuß?

Wie viel Berliner Klafter zu 113¾ Kubikfuß beträgt ein Holzstoß, dessen drei Dimensionen 36′, 25′ und 18½ sind?

Wie viel Frankfurter Kubikfuß sind 385′ französische Ster (Kubikmeter)?

Ein Graben, der 128′ lang, 36′ breit und 18′ tief ist, soll ausgefüllt werden. Wie viel Wagen Erde wird man dazu nöthig haben, wenn jeder Wagen 4½′ lang 3½′ breit und 2⅓′ tief ist und ⅖ der eingeworfenen Erde eingepreßt wird?

Wenn ein Steinblock 18′ lang, 12′ breit und 8′ hoch ist, wie viel Steine von 4½′ lang, 1½′ breit und ¾′ hoch kann man daraus machen?

Wie groß ist die Höhe eines Holzstoßes, der 148 Klafter zu 96½ Kubikfuß enthält, wenn die Grundfläche 25′ lang und 18′ breit ist?

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines steinernen Sarges, wenn die drei Dimensionen von außen 5′ 4″, 3′ 2″ und 2′ 5″ und die von innen 4′ 8″, 2′ 6″ und 1′ 10″ sind?

Wie viel wiegt eine Quadratsäule von getrocknetem Eichenholz, deren Länge 10′ 8″ und deren Grundfläche ein Quadrat

von 1′ 4″ im Duodezimalmaaß ist, wenn die spezifische Schwere = 1, 17 und ein Kubikfuß distillirten Wassers 50 ℔ wiegt?

Wie viel wiegt eine Platte von Gußeisen, die 3′ 8″ lang, 2′ 6″ breit und 1/3 dick ist, die spezifische Schwere zu . gerechnet?

Der körperliche Inhalt eines dreieckigen Prismas, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist, gleicht ebenfalls dem Produkte seiner Grundlinie mit seiner Höhe, denn man kann ein solches Prisma als die Hälfte eines rechtwinkligen Parallelepipedons ansehn, das eine doppelte Grundfläche hat; der körperliche Inhalt eines solchen Parallelepipedons ist aber das Produkt der doppelten Grundfläche des Prismas mit dessen Höhe; folglich ist der des Prismas das Produkt seiner Grundfläche mit seiner Höhe.

Es ist leicht zu erkennen, daß jedes Prisma, dessen Grundfläche ein beliebiges Dreieck ist, in zwei andere zerlegt werden kann, die rechtwinklige Dreiecke zur Grundfläche haben; jedes dieser Theilprismen hat aber, wie eben bewiesen wurde, einen körperlichen Inhalt, der dem Produkt seiner Grundfläche mit mit seiner Höhe gleicht; folglich wird das ganze Prisma ebenfalls gefunden, wenn man seine Grundfläche mit seiner Höhe multiplicirt.

Jedes Prisma endlich läßt sich in dreieckige Prismen zerlegen, woraus sich denn ergiebt, daß überhaupt der körperliche Inhalt eines jeden Prismas dem Produkte seiner Grundfläche mit seiner Höhe gleicht.

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines dreieckigen Prismas, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, wenn die Höhe 8′, 5″ und jede Seite der Grundfläche 5′ 7″ hält?

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Prismas, dessen Grundfläche ein reguläres Sechseck ist, wenn die Höhe 9′ 8″, und jede Seite der Grundfläche 4′ 7″ hält?

Auf ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 3′ 2″ und 5′ 8″ halten, soll ein Prisma von 150 Kubikfuß errichtet werden, wie groß muß die Höhe genommen werden.

Hier folgen noch einige Fragen über die Außenfläche der Parallelepipedon und der Prismen überhaupt, deren Beant-

antwortung sich leicht aus der Lehre vom Flächeninhalt der Figuren ergiebt.

Wie groß ist die Außenfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen drei Dimensionen 4′ 5″ — 6′, 7″ — 2′, 8″ sind?

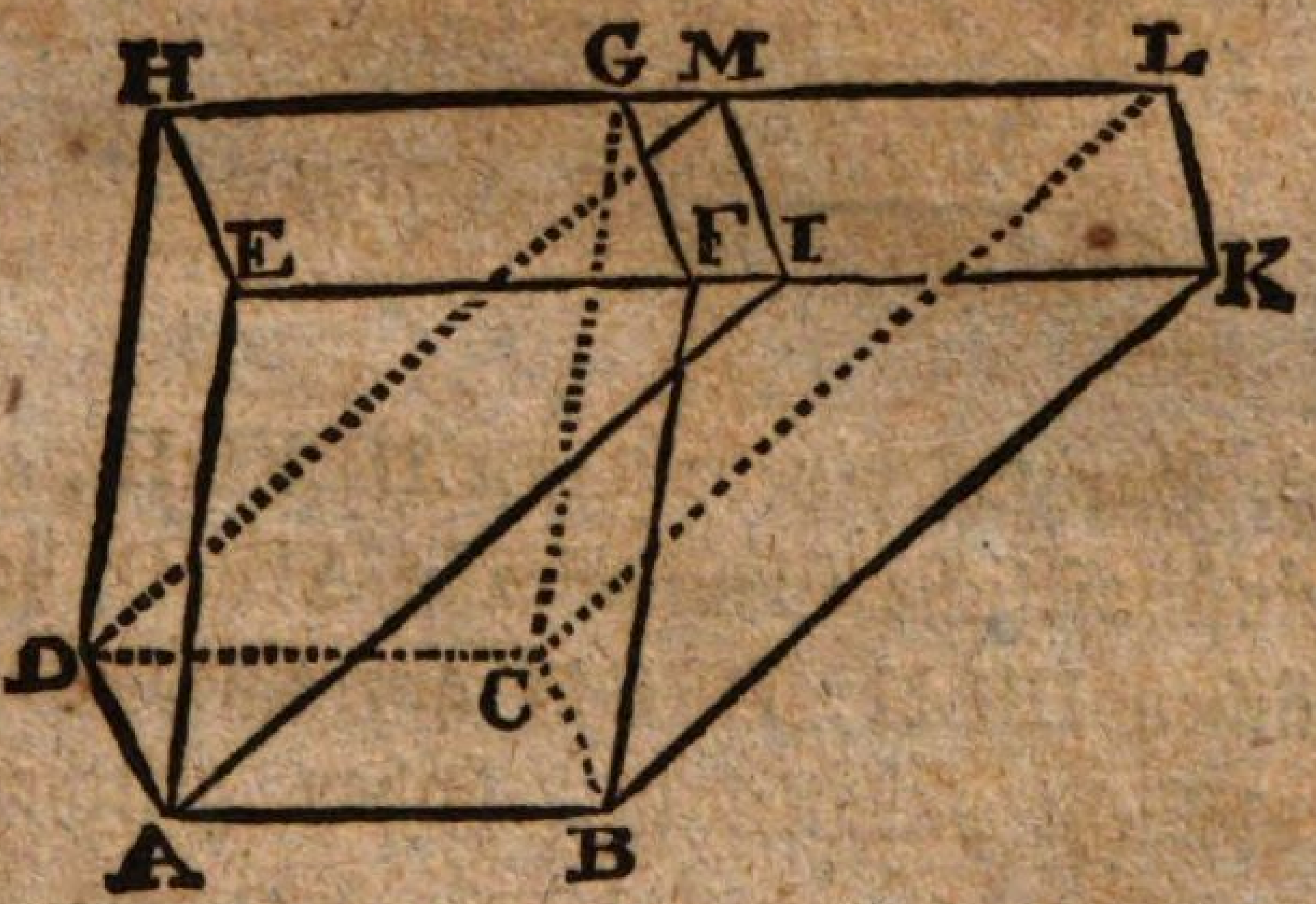
Wie groß ist die Außenfläche eines Würfels von 9′ 8″?

Wie groß ist die Außenfläche eines Würfels von 300 Kubikfuß?

Wie groß ist die Seite und der körperliche Inhalt eines Würfels, dessen Außenfläche 84□′ 124□″ enthält?

Wie groß ist die Außenfläche eines geraden Prismas, das auf einem gleichseitigen Dreieck ruht, wenn die Höhe 8′ 10″, und jede Seite der Grundfläche 3′ 6″ hält?

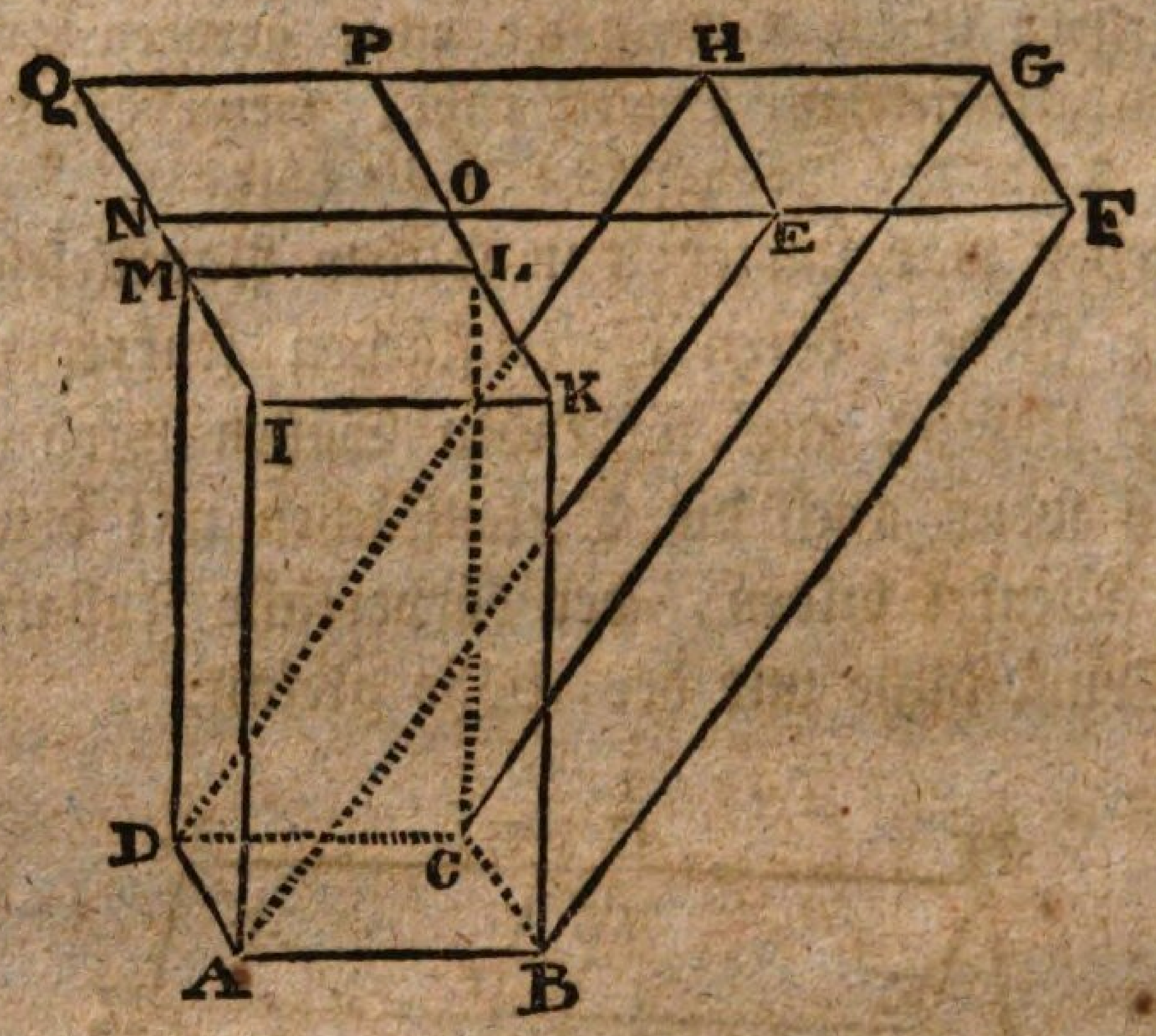
Bis hieher war immer von solchen Parallelepipeden und Prismen die Rede, deren Seitenflächen senkrecht auf ihren Grundflächen stehen; aus folgenden Sätzen wird es sich aber ergeben, daß wenn auch die Seitenflächen mit den Grundflächen schiefe Winkel bilden, der körperliche Inhalt dem Produkte der Grundfläche mit der Höhe gleicht.



1) Zwei Parallelepipeden ABCDEFGH, ABCDIKLM, die eine gemeinschaftliche Grundfläche ABCD haben, und deren zwei oberen Flächen EFGH, IKLM auf einerlei Ebene liegen und zwischen zwei Parallellinien HL, EK enthalten sind, haben gleichen körperlichen Inhalt.

Um dies zu beweisen, denke man sich einen einzigen Körper, der den Raum zwischen den Flächen AEBK, DHLC und den ihre Seiten verbindenden Rechtecken ausfüllt. Ferner be-

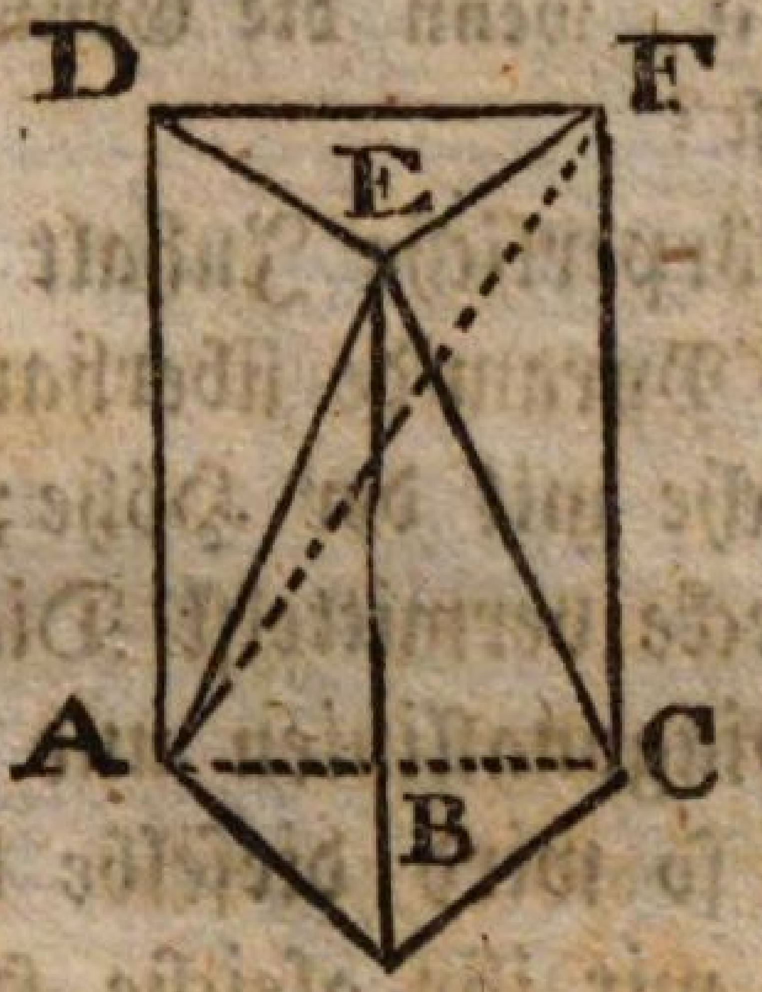
trachte man die zwei dreieckigen Prismen EAIHDM,FBKGCL. Diese zwei Prismen sind, wie sich leicht zeigen läßt, in allen Theilen einander gleich und haben daher auch gleichen körperlichen Inhalt. Nimmt man aber das erste dieser beiden Prismen von der Figur weg, so bleibt das Parallelepipedon ABCDIKLM, und nimmt man das zweite weg, so bleibt das Parallelepipedon ABCDEFGH; diese zwei Parallelepipeden haben also gleichen körperlichen Inhalt.



2) Zwei Parallelepipede ABCDEFGH, ABCDIKLM, die eine gemeinschaftliche Grundfläche ABCD haben, und deren obere Flächen IKLM, EFGH auf einer Ebene liegen, die mit der Grundfläche parallel ist, haben gleichen körperlichen Inhalt.

Man kann sich hievon überzeugen, wenn man die Seiten IL und KM, so wie die Seiten EF und GH verlängert, bis durch diese Verlängerung ein Parallelogramm NOPQ entsteht, und sich dann ein neues Parallelepipedon auf der Grundfläche ABCD denkt, dessen obere Fläche das Parallelogramm NOPQ ist. Aus dem vorigen Satze geht hervor, daß jedes der zwei gegebenen Parallelepipede diesem neuen Parallelepipedon an körperlichem Inhalte gleiche, und daher auch unter sich gleichen körperlichen Inhalt haben.

Es folgt aus diesen zwei Sätzen, daß man jedes schiefe Parallepipedon in ein gerades von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe verwandeln kann; man findet also den körperlichen Inhalt eines schiefen Parallelepipedons, und daher auch eines schiefen Prismas, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt.



Wenn man durch eine Spitze E eines dreieckigen Prismas und eine gegenüberstehende Kante AC eine Ebene gehen läßt, so wird dadurch vom Prisma eine Pyramide EABC abgeschnitten, welche gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit dem Prisma hat, und es bleibt eine vierkantige Pyramide, deren Grundfläche ADFC, und deren Spitze in E ist. Läßt man jetzt eine Ebene durch die drei Punkte E, A, F gehen, so wird dadurch diese vierkantige Pyramide in zwei dreikantige EFDA und EFCA zerlegt, welche eine gemeinschaftliche Spitze E und zwei congruente Grundflächen FDA und FCA haben und natürlich gleichhaltig sind. Die Pyramide EFDA aber kann auch als eine solche betrachtet werden, die ihre Grundfläche in DEF und ihre Spitze in A hat, und hat demnach gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit dem gegebenen dreikantigen Prisma; woraus denn hervorgeht, daß dieses Prisma dreimal so groß ist, als eine Pyramide, die gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Es folgt hieraus, daß man den körperlichen Inhalt einer dreikantigen Pyramide findet, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt und das Product durch drei dividirt.

Wie groß ist der körperliche Inhalt einer dreikantigen Pyramide, deren Höhe 8′ 5″, und deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von 2′ 4″ ist?

Wie groß ist der körperliche Inhalt einer dreikantigen Pyramide, wenn die Höhe 4′ 7″ hat und die Grundfläche ein rechtwinkliches Dreieck ist, dessen Katheten 4′ 2″ und 3′ 6″ haben.

Wie groß muß die Höhe einer dreikantigen Pyramide seyn, die 15 Kubikfuß hält, wenn die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von 1′ 8″ ist?

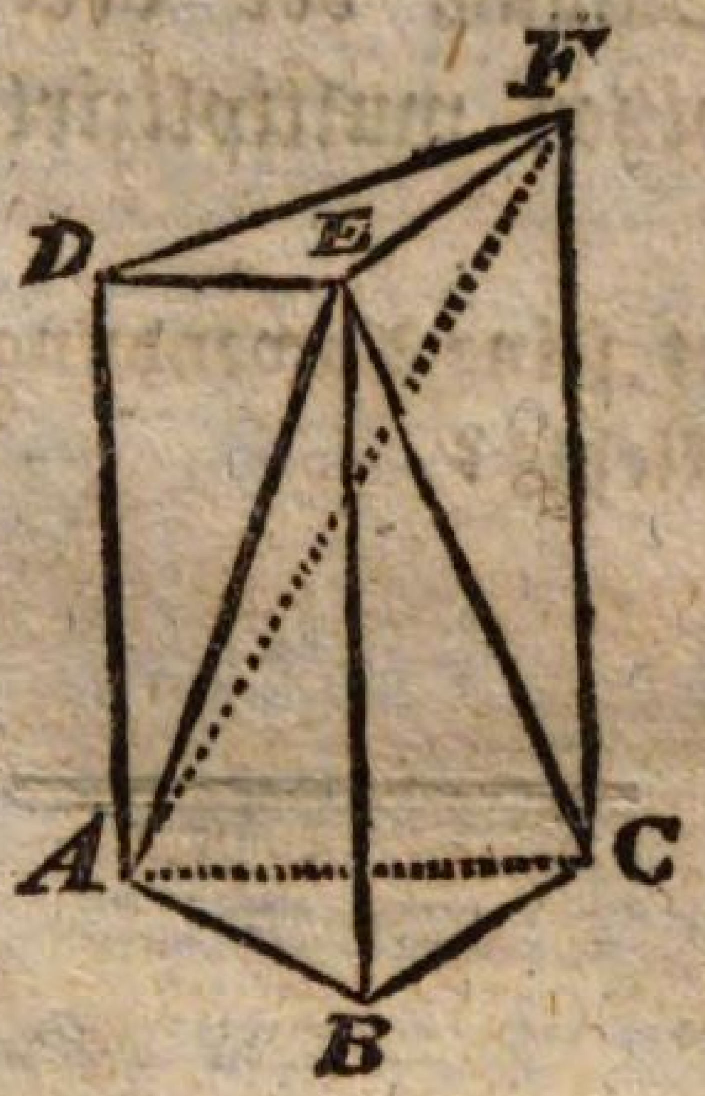
Nicht bloß der körperliche Inhalt der dreikantigen Pyramide, sondern jeder Pyramide überhaupt ist ein drittel vom Product der Grundfläche mit der Höhe; denn zerlegt man die Grundfläche in Dreiecke vermittelst Diagonallinien und läßt nachher durch diese Diagonallinien und die Spitze der Pyramide Ebenen gehen, so wird dieselbe dadurch in dreikantige Pyramiden zerlegt, die mit ihr gleiche Höhe haben, und deren Grundflächen zusammen ihrer Grundfläche gleichen man findet also den körperlichen Inhalt der gegebenen Pyramide, wenn man ihre Höhe mit der Summe der Grundflächen jener dreikantigen Pyramiden oder mit ihrer eignen Grundfläche multiplicirt und ein drittel vom Produkt nimmt.

Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Pyramide, die 7′ 5″ in der Höhe hat, und deren Grundfläche ein Quadrat von 4′ 7″ ist.

Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Pyramide, die 6′ 8″ in der Höhe hat, und deren Grundfläche ein Quadrat von 6′ 3″ ist?

So wie man jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen kann, so läßt sich jeder Polyeder in Pyramiden zerlegen, deren Grundflächen die verschiedenen Vielecke sind, welche den Körper einschließen, und deren gemeinschaftliche Spitze irgend ein Punkt im Innern des Polyeders ist. Diese Zerlegung kann indessen nur in der Vorstellung vollzogen werden, und bietet kein Mittel dar, den körperlichen Inhalt eines irregulären Polyeders zu bestimmen. Viel leichter bestimmt man den körperlichen Inhalt eines jeden Körpers vemittelst seines Gewichtes, wenn man seine spezifische Schwere, so wie das Gewicht von ei-

nem Kubikfuß distillirten Wassers kennt. In manchen Fällen läßt sich auch der körperliche Inhalt bestimmen, wenn man den Körper in ein zum Theil mit Wasser gefülltes Gefäß thut, das die Gestalt eines Parallelepipedons oder Cylinders hat, und die Höhe beobachtet, um welche das Wasser dabei steigt.



So wie das vollkommene Prisma sich in drei Pyramiden von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche zerlegen läßt, so kann mau auch ein abgestumpftes Prisma d. h. ein solches, dessen obere Fläche DEF mit der untern ABC nicht parallel ist, in drei Pyramiden zerlegen, welche wiederum in drei andere verwandelt werden können, deren gemeinschaftliche Grundfläche ABC und deren Spitzen die Punkte D, E, F sind. Zieht man nämlich eine Ebene durch AC und E so erhält man gleich die Pyramide ABCE, welche ABC zur Grundfläche und E zur Spitze hat, und es bleibt eine vierkantige Pyramide ACDFE, welche wiederum vermittelst einer Ebene, welche durch AF und E geht, und in zwei dreikantige Pyramiden ACFE und ADFE zerlegt werden kann. Die Pyramide ACFE gleicht der Pyramide ACFB an Flächeninhalt; denn sie hat mit ihr eine gemeinschaftliche Grundfläche ACF und die Spitzen B und E liegen auf einer Linie EB, die mit der gemeinschaftlichen Grundfläche parallel ist; sie gleicht also einer Pyramide, welche ABC zur Grundfläche und F zur Spitze hat. Die Pyramide ADFE endlich hat ADF zur Grundfläche und E zur Spitze; verlegt man aber diese Spitze von

Staatl. Bibliothek Passau

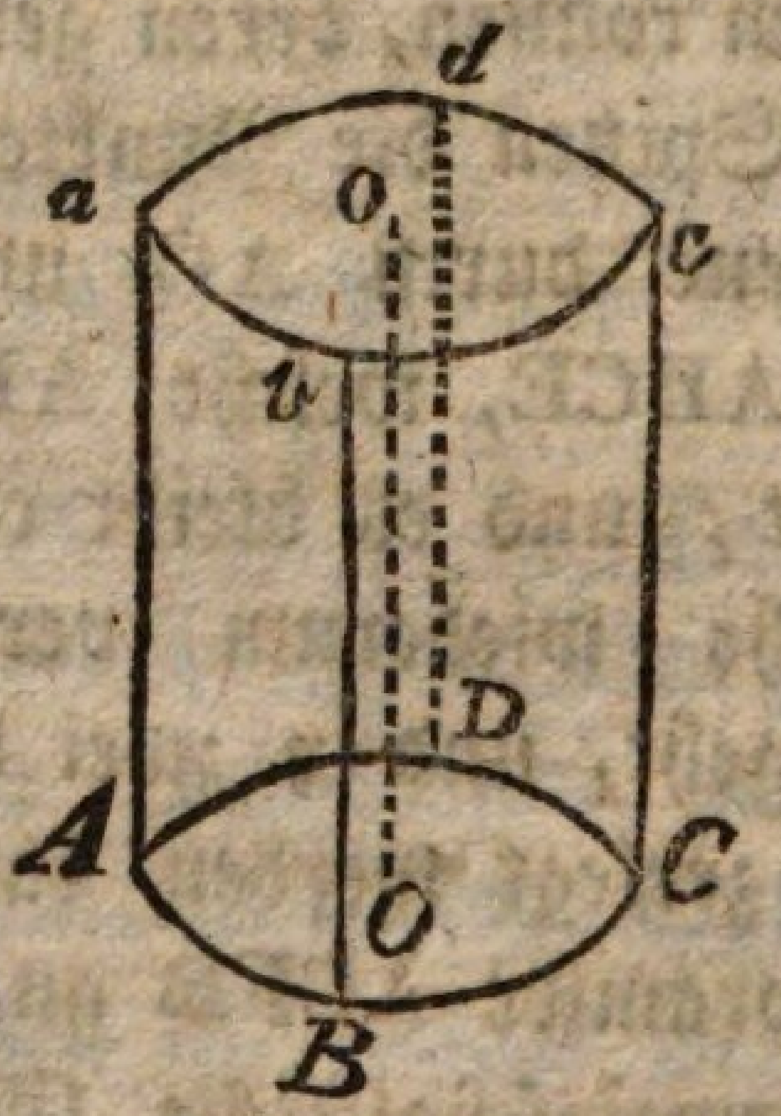
E in B, so erhält man eine Pyramide, welche DAB zur Grundfläche und F zur Spitze hat; verlegt man dann diese Spitze von F in C, so erhält man eine dritte Pyramide, welche ABC zur Grundfläche und D zur Spitze hat.

Es folgt hieraus, daß man den körperlichen Inhalt eines abgestumpften dreikantigen Prismas findet, wenn man die Grundfläche mit der Summe der drei senkrechten Entfernungen der drei obern Spitzen multiplizirt und ein Drittel vom Produkte nimmt.

Dieser Satz findet seine Anwendung bei der Ausmessung vom Inhalte eines Schiffkiehls?

Eilfter Abschnitt.

Vom Cylinder.



Ein Cylinder ABCDabcd ist als ein Prisma zu betrachten, dessen Grundflächen ABCD, abcd reguläre Vielecke von unendlich vielen Seiten, d. h. Kreisflächen sind. Die gerade Linie O o, welche die Mittelpunkte dieser zwei Kreisflächen verbindet, heißt die Axe des Cylinders.

Es geht aus dieser Erklärung hervor, daß der körperliche Inhalt eines Cylinders gefunden wird, wenn man die Kreisfläche, welche ihm zur Grundfläche dient, mit der Höhe des Cylinders multiplizirt. Unter Höhe versteht man hier die senkrechte Linie, welche von irgend einem Punkte der obern Kreisfläche auf die untere gezogen wird. Diese Höhe ist die Axe O o selbst, wenn diese auf beiden Kreisflächen senkrecht steht. Gewöhnlich ist nicht der Flächeninhalt der Grundfläche, sondern ihr Durchmesser gegeben, und man findet dann den körperlichen Inhalt des Cylinders, wenn man das Quadrat des Durchmessers mit der Zahl π und das Produkt mit der Höhe multiplizirt.

Oft ist nicht der Durchmesser, sondern die Peripherie der Grundfläche gegeben, in welchem Falle man zuerst den Durchmesser berechnet, indem man die Peripherie durch die Zahl π dividirt und dann wie oben verfährt.

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Cylinders, der 5′ 8″ im Durchmesser und 12′ 4″ Höhe hat?

Wie viel Ohm Wasser hält ein cylinderförmiger Behälter, der 12′ im Durchmesser und 8′ 6″ Höhe hat? Eine Ohm zu 5 Kubikfuß gerechnet.

Wie viel Pfund distillirtes Wasser hält eine cylinderförmige Säule von Gußeisen, die 6′ 8″ im Durchmesser und 7′ 6″ Höhe hat, wenn die specifische Schwere des Gußeisens zu 7,107 gerechnet wird, und ein Kubikfuß distillirtes Wasser 50 Pfund wiegt?

Wie viel Kubikfuß Holz hält ein Baum, der 2′ 8″ im Umfang, und 9′ 5″ Höhe hat?

Wie viel Ster oder Kubikmeter Holz hält ein Stamm, der im Frankfurter Maaß 3′ 8″ im Umfang und 6′ 7″ Höhe hat?

Wie viel Kubikfuß hält ein hohler Cylinder, der 4′ 7″ im Umfang und 6′ 8″ Höhe hat und 5″ dick ist? (Man sieht leicht ein, daß ein solcher Cylinder als der Unterschied zweier Cylinder zu betrachten ist.)

Wenn der körperliche Inhalt und die Grundfläche eines Cylinders gegeben sind, so findet man den Flächeninhalt der Grundfläche in dem man den körperlichen Inhalt durch die Höhe dividirt. So findet man

auch umgekehrt die Grundfläche, wenn der körperliche Inhalt und die Höhe gegeben sind. Um dann den Durchmesser zu finden, muß man noch den Flächeninhalt durch die Zahl π dividiren und aus dem Quotienten die Quadratwurzel ziehn, worauf man dann auch den Umfang des Cylinders finden kann.

Wie hoch muß ein Cylinder seyn, der 84 Kubikfuß, 615 Kubikzoll hält, wenn die Grundfläche 3□′ 28□″ hat?

Wie hoch muß ein Cylinder von 620½ Kubikfuß seyn, wenn er 5′ 7″ im Durchmesser hat.

Wie hoch muß ein Cylinder seyn, der 98 Kubikfuß hält und 2′ 5″ im Umfang hat?

Wie groß ist der Durchmesser eines Cylinders von 740 Kubikfuß und 15′ 9″ Höhe?

Wie groß ist der Umfang eines Cylinders von 248¾ Kubikfuß und 9′ 8″ Höhe?

Wie hoch muß ein cylinderförmiger Kessel von 3′ 8″ Durchmesser seyn, wenn er 8 Ohm halten soll?

Wie lange wird eine Stange von Gußeisen, die 8‴ im Durchmesser hat und 125 Pfund wiegt?

Wenn das Wasser aus einer Mündung mit einer solchen Geschwindigkeit fließt, daß es in jeder Sekunde 5 Zoll zurücklegt, wie groß muß der Durchmesser der kreisrunden Mündung genommen werden, wenn in drei Minuten ein Ohm Wasser herausfließen soll?

Wenn ein Cylinder nicht in seiner ganzen Länge denselben Durchmesser hat, so findet man seinen körperlichen Inhalt sehr nahe, wenn man den Durchmesser in verschiedenen Punkten ausmißt, alle diese Durchmesser addirt und die Summe durch die Anzahl der Druchmesser dividirt, wodurch man einen mittleren Durchmesser erhält, den man mit ziemlicher Genauigkeit als den Durchmesser des Cylinders seiner ganzen Länge nach ansehen kann. Um zum Beispiel den körperlichen Inhalt eines Fasses zu finden, nimmt man den Durchmesser des Bodens doppelt, addirt den am Spundloche dazu und nimmt das drittel der Summe, welche Zahl man dann als den Durchmesser des Fasses seiner ganzen Länge nach annimmt.

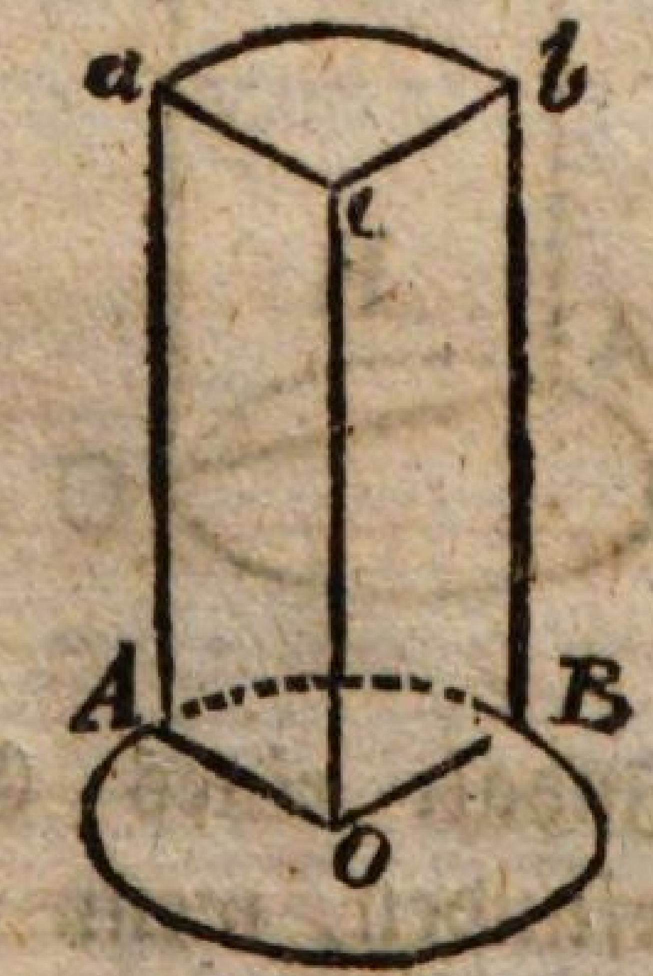
Die Oberfläche eines Cylinders, beide Böden nicht mitgerechnet, kann ebenfalls mit der Seitenfläche eines Prismas verglichen werden. Diese besteht aus mehreren Rechtecken, oder Parallelogrammen, die gleiche Höhen haben, und deren Gesammtinhalt daher gefunden wird, wenn man die Summe ihrer Grundlinien oder den Umfang der Grundfläche des Prismas mit der gemeinschaftlichen Höhe multiplizirt. Man findet also auch den Flächeninhalt eines Cylinders, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der Länge des Cylinders oder was dasselbe ist, mit der Länge der Axe multiplizirt. Wenn der Flächeninhalt und die Länge der Axe eines Cylinders gegeben sind, so findet man die Peripherie der Grundfläche durch eine Division, und so auch umgekehrt, wenn der Flächeninhalt und die Peripherie der Grundfläche gegeben sind.

Wie viel hält die Oberfläche eines Cylinders, dessen Axe 8′ 9″ laug ist, und dessen Grundfläche 4′ 7″ im Durchmesser hat?

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Cylinders, wenn die Axe 12′ 8″ lang ist, und die Grundfläche 5′ 8″ im Durchmesser hat?

Wie groß ist die Oberfläche eines Cylinders, dessen Axe 12′ 4″ in der Länge hat, und dessen Grundfläche 3□′ 120□″ hält?

Wie viel Quadratfuß Blech braucht man zu einer Büchse, Boden und Deckel mit inbegriffen, die 6′ im Durchmesser und 9′ in der Höhe haben soll?



Der körperliche Inhalt eines Cylinderausschnittes ABO abo, welcher zwischen einem Theile der Oberfläche des Cylin-

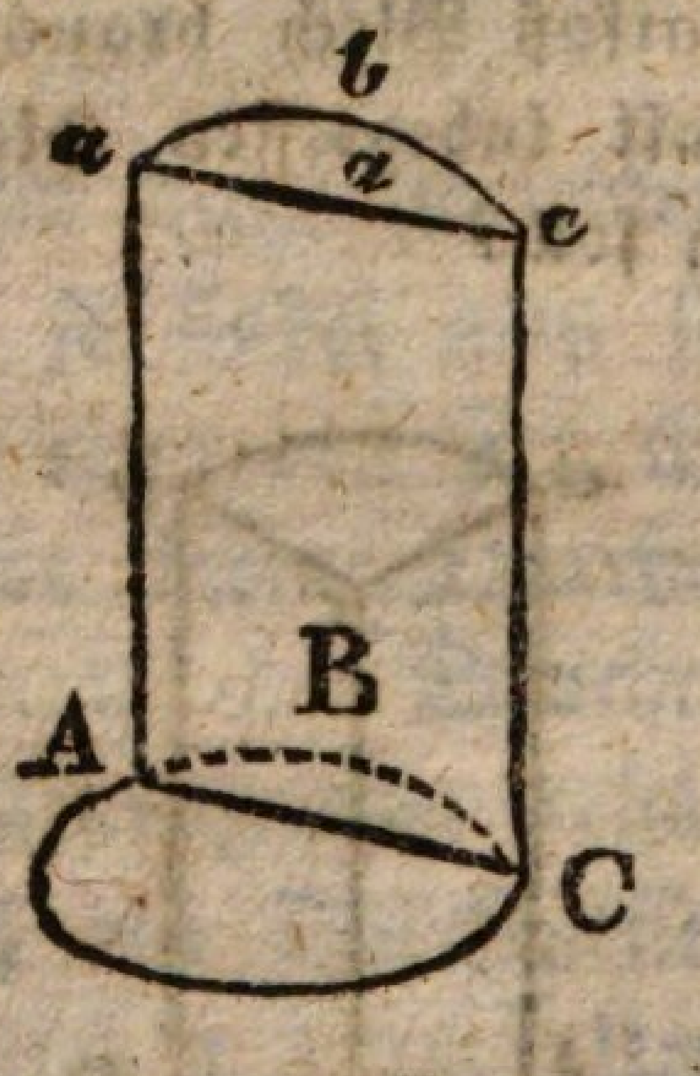
ders und zwei durch die Axe gehenden Ebenen enthalten ist, verhält sich zum ganzen Cylinder, wie der Bogen AB zu der ganzen Peripherie, oder wie die Anzahl der Grade dieses Bogens zu 360°. Da nun der Kreisausschnitt AOB in demselben Verhältniß zu der ganzen Kreisfläche steht, so findet man den körperlichen Inhalt des Cylinderausschnites, wenn man den Flächeninhalt des ihm zur Grundfläche dienenden Kreisausschnittes mit der Höhe des Cylinders multiplizirt. Der concave Flächeninhalt eines solchen Cylinderausschnittes wird gefunden, wenn man die Länge des Bogens AB mit der Länge der Axe multiplizirt.

Wie viel Kubikfuß hält ein Cylinderausschnitt von 26, 48,′ wenn der Cylinder 3′ 8″ im Durchmesser und 12′ 5″ in der Höhe hat?

Wie viel Kubikfuß hält ein Cylinderausschnitt von 36°, 48′, wenn der Cylinder 3′ 9″ im Durchmesser und 12′ 5″ in der Höhe hat?

Wie groß ist die gesammte Oberfläche eines Cylinderausschnittes von 25° 36′, wenn der Durchmesser 2′ 4″ hält, und die Axe 6′ 5″ in der Länge hat?

Wie viel Grad muß ein Cylinderausschnitt von 25 Kubikfuß haben, wenn der ganze Cylinder 4′ 8″ im Durchmesser und 12′ 7″ in der Höhe hat?



Der körperliche Inhalt eines Cylinderabschnittes abc ABC wird ebenfalls gefunden, wenn man den Kreisabschnitt ABC, welcher ihm zur Grundfläche dient, mit der Höhe des Cylinders multiplicirt. Was die coniave Oberfläche betrifft, so wird sie ganz wie die eines Cylinderausschnittes berechnet.

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Cylinderabschnittes von 42° 25′, wenn der Cylinder 5′ 4″ im Durchmesser und 15′ 7″ in der Höhe hat?

Wie groß ist die gesammte Oberfläche eines Cylinderabschnittes von 12° 54, wenn der Durchmesser 6′ 9″ und die Axe 12′ 3″ hält?

Es giebt auch Cylinder, deren Grundfläche kein Kreis, sondern eine Ovallinie oder sonst eine geschlossene krumme Linie ist. Der körperliche Inhalt solcher Cylinder wird ebenfalls gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt, so wie man die concave Oberfläche erhält, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der Länge der Axe multiplizirt. Die Oberfläche sowohl kreisförmiger als anderer Cylinder hat die Eigenschaft, daß man sie auf einer Ebene abwickeln kann, oder umgekehrt, daß man auf einer Ebene eine Figur bilden kann, die sich ganz um die Oberfläche des Cylinders wickeln läßt. Die Abwickelung eines Cylinders, dessen Axe senkrecht auf der Grundfläche steht, ist, wie leicht einzusehen, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfang und dessen Höhe der Axe des Cylinders gleicht. Zieht man die Diagonallinie eines solchen Rechteckes, so bildet sie beim Umwickeln um den Cylinder einen Schraubengang, und man kann mehrere Schraubengänge erhalten, wenn man in dem Rechteck Linien parallel mit der Grundlinie zieht, und zwar so, daß sie die Höhe in gleiche Theile zerlegen. Das Rechteck wird dadurch in mehrere congruente Rechtecke zerlegt, und die nach einer Richtung gezogenen Diagonallinien dieser Rechtecke bilden eben so viele Schraubengänge.

Zwölfter Abschnitt.

Vom Kegel.

Ein Kegel SABCDEFG ist ein runder Körper, der zwischen einer Kreisfläche ABCDEFG, die ihm zur Grundfläche dient, und einer krummen Fläche enthalten ist, die auf eine Spitze S ausgeht, und diese krumme Fläche ist so gestaltet, daß wenn man einen beliegen Punkt B auf der Peripherie der Grundfläche mit der Spitze S verbindet, diese gerade Linie ganz auf der krummen Fläche liegt. Die Axe eines Kegels ist eine gerade Linie in seinem Innern, welche die Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche verbindet. Der Kegel ist gerade, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht.

Man kann einen Kegel als eine Pyramide betrachten, deren Grundfläche ein reguläres Vieleck von unendlich großer Seitenzahl ist. Es folgt hieraus, daß der körperliche Inhalt eines Kegels gefunden wird, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt und das Drittel vom Produkte nimmt. Ist der Durchmesser der Grundfläche gegeben, so multiplizirt man das Quadrat seiner Hälfte mit der Zahl π, das Herauskommende mit der Höhe des Kegels und nimmt ein Drittel vom Product. Unter Höhe versteht man hier die senkrechte Linie, welche von der Spitze des Kegels auf die Grundfläche gefällt wird.

Ist der körperliche Inhalt und die Grundfläche eines Kegels gegeben, so findet man die Höhe, wenn man das Dreifache des körperlichen Inhaltes durch die Grundfläche dividirt. Ist der körperliche Inhalt und die Höhe gegeben, so dividirt man das Dreifache des körperlichen Inhaltes durch die Höhe, das Herauskommende durch die Zahl π und zieht daras die Quadratwurzel, und man hat den Halbmesser der Grundfläche.

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Kegels, wenn die Grundfläche 7′ 9″ im Umfange hat, und die Höhe 8′ 5″ hält?

Wie viel wiegt ein kupferner Kegel, dessen Höhe 4′ 6″ ist, und dessen Grundfläche 3′ 8″ im Umfang hat, wenn die spezifische Schwere des Kupfers 8.876 ist?

Wie groß ist die Höhe eines Kegels von 56 Kubikfuß, wenn der Durchmesser der Grundfläche 4′ 8″ hat?

Wie groß ist die Höhe eines Kegels von 24 Kubikfuß, wenn die Grundfläche 6′ 9″ im Umfange hat?

Welchen Durchmesser hat die Grundfläche eines Kegels von 36 Kubikfuß, wenn die Höhe 7, 9″ hält?

Wenn man einen Kegel mit einer Ebene durchschneidet, die mit der Grundfläche parallel ist, erhält man einen **abgestumpften Kegel**. Ein solcher abgestumpfter Kegel ist der Unterschied zwischen dem ganzen Kegel und dem abgeschnittenen Stücke, welches ebenfalls ein Kegel ist; man kann daher leicht seinen körperlichen Inhalt finden, wenn man den Durchmesser der Grundflächen, den des Durchschnittes und die Höhen der beiden Kegel kennt. Man beweist übrigens, daß ein abgestumpfter Kegel der Summe dreier ganzen Kegel gleicht, deren gemeinschaftliche Höhe die des abgestumpften Kegels ist, und deren Grundfläche folgende Durchmesser haben: 1) Der Durchmesser der oberen Fläche des abgestumpften Kegels, 2) der Durchmesser der untern Fläche desselben, 3) eine mittlere geometrische Proporzionallinie zwischen diesen beiden Durchmessern.

Wie groß ist der körperliche Inhalt eines abgestumpften Kegels, wenn seine Höhe 6′ 10″, der Durchmesser der obern Grundfläche 3′ 5″ und der der untern Grundfläche 4′ 7″ hält?

Der körperliche Inhalt der Kegel und der abgestumpften Kegel wird auf dieselbe Weise gefunden, wenn die Grundfläche keine Kreisperipherie sondern irgend eine andere geschlossene krumme Linie im Umfange hat; nur daß alsdann nicht eine mittlere geometrische Proporzionallinie zwischen zwei Durchmessern sondern eine mittlere geometrische Proporzionalfläche zwischen der obern und der untern Fläche gesucht wird.

Die concave Oberfläche eines geraden Kegels wird ebenfalls gefunden, wenn man sie mit der einer Pyramide vergleicht, deren Grundfläche ein reguläres Vieleck ist, und deren Spitze sich auf der senkrechten Linie befindet, die über dem Mittelpunkt der Grundfläche erhoben wird. Die Oberfläche einer solchen Pyramide, die Grundfläche nicht mitgerechnet, besteht aus eben so vielen gleichen Dreiecken, als die Grundfläche Seiten hat, und ihre gemeinschaftliche Höhe ist die senkrechte Linie, welche von der Spitze der Pyramide auf irgend eine Seite der Grundfläche gezogen wird. Man findet daher die Oberfläche der Pyramide, wenn man die Hälfte dieser Senkrechten mit der Summe aller Grundlinien der Dreiecke oder mit dem Umfange der Grundfläche multiplizirt. Da nun ein gerader Kegel als eine solche Pyramide zu betrachten ist, deren Grundfläche ein reguläres Vieleck von unendlicher Seitenzahl ist, so findet man seinen Flächeninhalt, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der geraden Linie multiplizirt, welche die Spitze des Kegels mit einem Punkte dieser Peripherie multiplizirt, und die man auch die Seite des Kegels nennt und dann das Produkt halbirt. Man kann übrigens die Seite des Kegels vermittelst der Axe und des Halbmessers der Grundlinie leicht berechnen; denn sie bildet mit diesen zwei Linien ein rechtwinkliches Dreieck.

Wie viel hält die concave Oberfläche eines Kegels, dessen Höhe 15′ 6″ und dessen Grundfläche 3′ 2″ im Durchmesser hat?

Wie groß ist die Oberfläche eines Kegels, wenn die Seite 7′ 6″ und die Grundfläche 2′ 8″ im Durchmesser hat?

Wie groß ist die gesammte Oberfläche eines Kegels, wenn die Höhe 4′ 8″ und die Grundfläche 2′ 5″ im Durchmesser hat?

Die concave Oberfläche eines abgestumpften geraden Kegels läßt sich mit der einer abgestumpften Pyramide vergleichen, deren Grundfläche ein reguläres Vieleck ist, und deren Spitze sich auf der senkrechten Linie befindet, die über dem Mittelpunkt der Grundfläche erhoben wird. Aus dieser Vergleichung ergiebt sich, daß die Oberfläche eines abgestumpften geraden Kegels gefunden wird, wenn man die halbe Summe der Peripherien der beiden Grundflächen mit der Seite multiplizirt.

Wie groß ist der concave Flächeninhalt eines abgestumpften geraden Kegels, wenn die Seite 4′ 9″, die obere Fläche 3′, 5″ und die untere Fläche 4′ 8″ im Durchmesser hat?

Ein Kegelausschnitt SABO ist zwischen einem Theile der concaven Oberfläche des Kegels und zwei Ebenen SAO, SBO enthalten, welche durch die Axe SO gehen. Ist der Kegel gerade, so verhält sich der Ausschnitt zum ganzen Kegel, wie der Bogen AB zu der ganzen Peripherie der Grundfläche. Durch eine ähnliche Proportion findet man auch die concave Oberfläche eines solchen Kegelausschnittes.

Wie groß ist die concave Oberfläche eines Kegelausschnittes von 24° 18′, wenn die Höhe 7′ 2″ und die Grundfläche 2′ 4″ im Durchmesser hat?

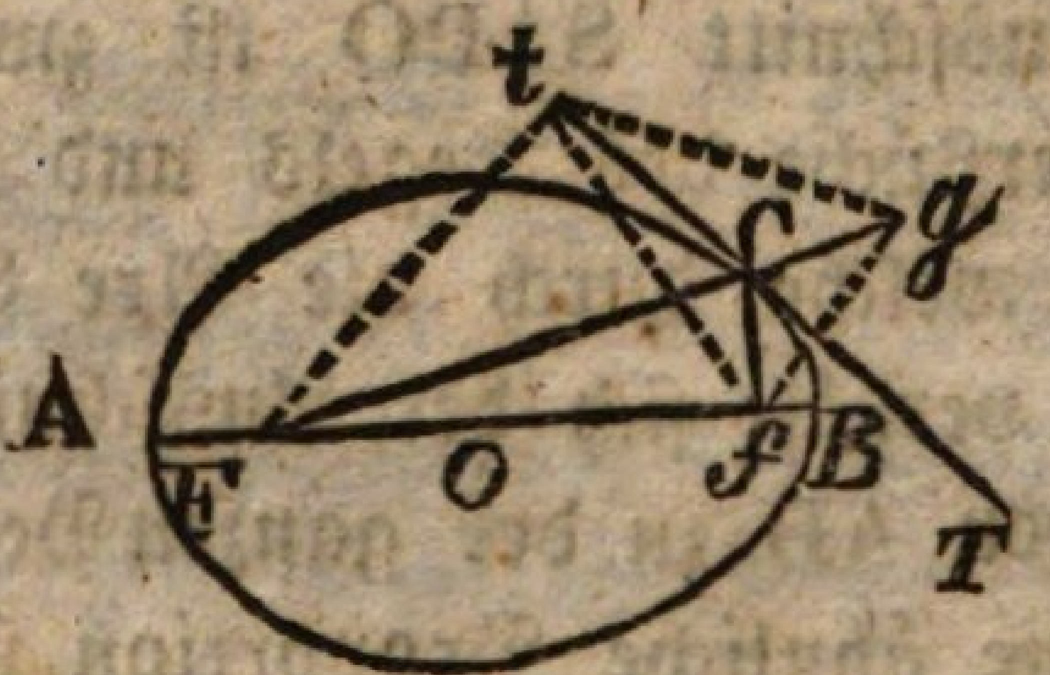
Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Kegelausschnittes von 25°, 42′, wenn die Höhe 7′ 5″ und die Grundfläche 3′ 6″ im Durchmesser hat?

Der Kegel ist wie der Cylinder eine abwickelbare Fläche. Die Abwickelung eines geraden Kegels ist ein Kreisaus-

schnitt, dessen Halbmesser die Seite des Kegels ist. Die ganze Peripherie dieses Ausschnittes verhält sich zu derjenigen der Grundfläche des Kegels, wie dessen Halbmesser zu dem Durchmesser der Grundfläche. Da man nun weiß, wie groß der Bogen des Kreisausschnittes und wie groß die ganze Peripherie ist, so kann man auch das Verhältniß dieses Bogens zur ganzen Peripherie oder seine Größe an Graden und Minuten berechnen, und dadurch einen Kreisausschnitt machen, der zu einem Kegel von verlangter Gestalt umgebogen werden kann.

Wenn man einen Kegel von 6′ 7″ Höhe und 3′ 8″ Durchmesser abwickelt, wie groß wird der Winkel des entstehenden Kreisausschnittes seyn?

Wenn man einen Kegel mit einer Ebene durchschneidet, die mit der Grundfläche parallel ist, so ist die Gestalt des Durchschnittes jedes Mal die einer Kreislinie, wie leicht zu beweisen ist. Ist aber die durchschneidende Ebene nicht mit der Grundfläche parallel, so kann man drei verschiedene krumme Linien erhalten, welche man die **Kegelschnitte** nennt, und die in der Anwendung der Geometrie häufig vorkommen.



Wenn die durchschneidende Ebene durch alle Seiten des Kegels geht, d. h. durch alle geraden Linien, welche die Spitze mit den verschiedenen Punkten der Peripherie der Grundfläche verbinden, so ist der Durchschnitt eine länglich runde, geschlossene, krumme Linie, wie sie hier die Figur zeigt. Eine solche krumme Linie nennt man eine **Ellipse**. Die Punkte A und B an, welchen ihre Krümmung am stärksten ist, heißen

die Scheitelpunkte, und die gerade Linie A B, welche dieselben verbindet, heißt die Hauptaxe. Auf der Hauptaxe liegen in gleichen Entfernungen von den Scheitelpunkten zwei Punkte F und f, welche die Brennpunkte heißen, und folgende merkwürdige Eigenschaft haben. Wenn man einen beliebigen Punkt C der Ellipse mit beiden Brennpunkten F, f durch gerade Linien verbindet, so ist die Summe dieser beiden Linien, welche man die Vectorlinien nennt, so groß als die Hauptaxe. Diese Eigenschaft der Ellipse giebt ein Mittel, sie durch eine fortgesetzte Bewegung zu beschreiben. Befestigt man nämlich die beiden Enden eines Fadens, der genau so lang als die Hauptaxe ist, an beide Punkte und spannt nachher den Faden mit einem Stifte, so wird der Stift, wenn man ihn fortbewegt und immer dabei den Faden gespant hält, eine Ellipse beschrieben.

Der Mittelpunkt einer Ellipse ist die Mitte C der Hauptaxe AB. Die Entfernung des Mittelpunktes von einem der beiden Brennpunkte heißt die Excentricität.

Wenn durch einen gegebenen Punkt C auf einer Ellipse eine Tangente gezogen werden soll, so zieht man beide Vectorlinien CF und Cf, verlängert die große Vectorlinie um Cg = Cf, zieht die gerade Linie gf und fällt dann von C eine senkrechte tCT, welche die verlangte Tangente seyn wird.

Um zu beweisen, daß diese Linie eine Tangente ist, muß man beweisen, daß für jeden ihrer Punkte außer dem Punkte C, z. B. für den Punkt t, die Summe der Entfernungen von den beiden Brennpunkten größer seyn wird, als die Hauptaxe, oder auch als die Linie Fg, welche so groß als die Hauptaxe ist, indem man CF um Cf verlängert hat. Nun ist aber, vermöge der Construction tf = tg; also tf und tF zusammen so viel als tg und tF zusammen; diese beiden Linien zusammen sind aber augenscheinlich größer als gF oder als die Hauptaxe, weil die Summe zweier Seiten eines Dreieckes immer größer ist, als die dritte allein.

Die Tangente theilt, wie aus der Construction hervorgeht, den Winkel gCf in zwei gleiche Theile; es ist also W.

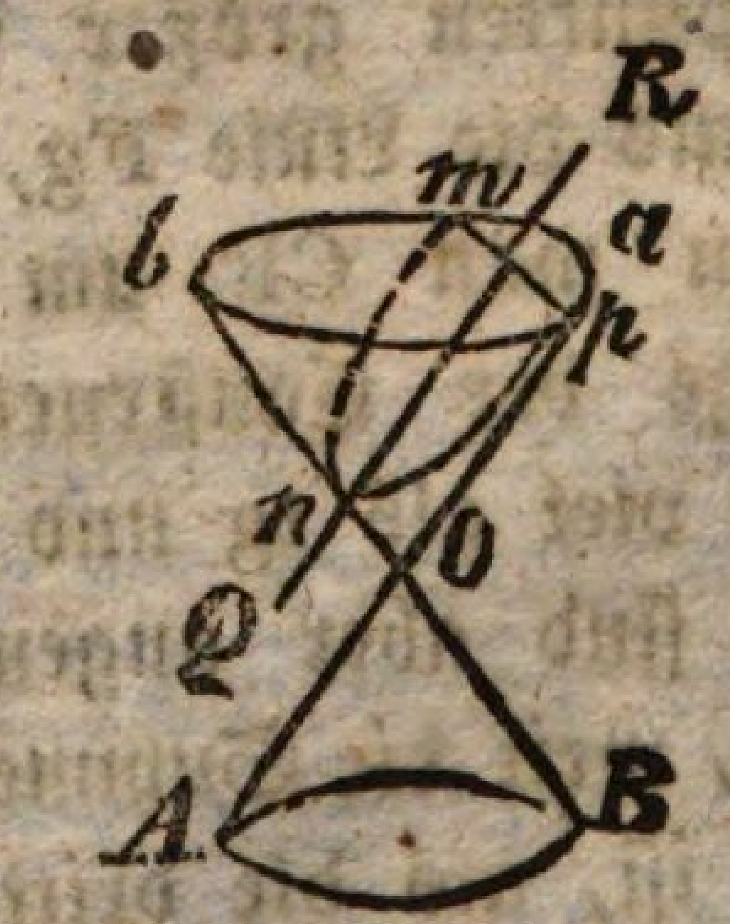
fCT = W. gCT; es ist aber auch W. FCt = gCT als Scheitelwinkel; folglich ist auch W. FCt = W. fCT. Es geht hieraus hervor, daß wenn in F ein leuchtender Punkt ist, der einen Lichtstrahl nach C sendet, der Lichtstrahl, vermöge einer bekannten Eigenschaft des Lichtes, nach f zurückgeworfen wird, im Falle die Peripherie der Ellipse der Rand eines polirten Körpers ist, und da dies auch für alle nach den übrigen Punkten der Ellipse gesandten Lichtstrahlen statt findet, so hat die Ellipse die merkwürdige optische Eigenschaft, daß alles von einem Brennpunkte nach der Peripherie gesandte Licht, sich in dem andern Brennpunkte wieder vereinigt, welches auch die Benennung dieser Punkte erklärt.

Die Projektion eines Kreises auf eine Ebene ist eine Ellipse.

Die perspektivische Darstellung eines Kreises, wenn er nicht mit der Tafel parallel ist, ist ebenfalls eine Ellipse.

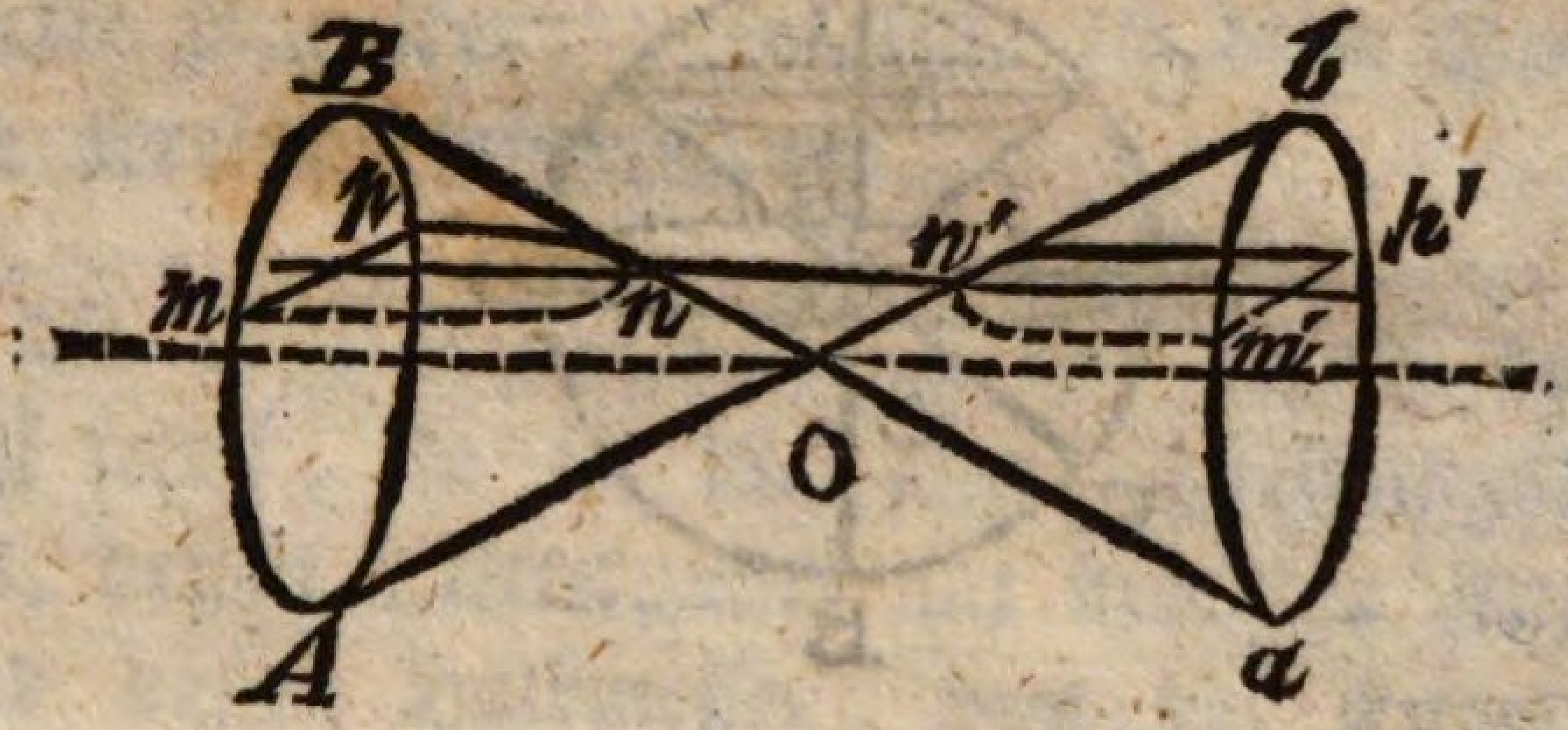
Wenn man über den Mittelpunkt einer Ellipse eine senkrechte Linie auf die Hauptaxe erhebt, die ihre beiden Endpunkte auf der Ellipse hat, so erhält man die kleine Axe der Ellipse, und man beweist, das der Flächeninhalt einer Ellipse gefunden wird, wenn man die Hälfte der Hauptaxe mit der Hälfte der kleinen Axe und das Produkt mit der Zahl π multiplizirt.

Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, wenn die Hauptaxe 5′ 6″ und die kleine Axe 4′ 2″ hält?



Jedem Kegel Oab entspricht ein zweiter Kegel OAB, der dieselbe Spitze O hat, und gleichsam als eine Verlänge-

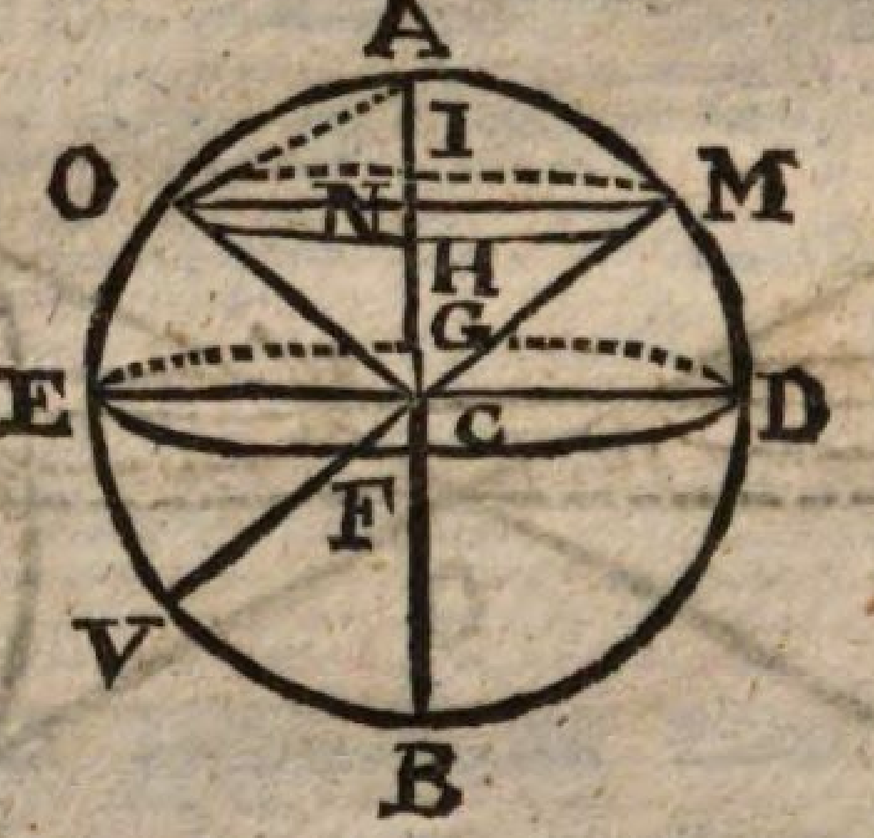
rung des ersten Kegels angesehen werden kann. Ein solcher doppelter Kegel entsteht, wenn eine gerade Linie, die eine andere durchschneidet, sich so um dieselbe dreht, daß sie immer mit ihr denselben Winkel bildet und sie in demselben Punkte durchschneidet. Wird ein doppelter Kegel von einer Ebene QR durchschnitten, die mit einer seiner Seiten Aa parallel ist, so ist, die Durchschneidung eine offene Krumme Linie mnp, die sich ins Unendliche erstreckt, wenn man sich den Kegel selbst ins unendliche verlängert denkt. Eine solche krumme Linie heißt eine P a r a b e l.



Wenn die durchschneidende Ebene mit keiner Seite des doppelten Kegels ABba parallel ist, so sind zwei Fälle möglich: Entweder die Ebene durchschneidet nur einen der beiden Kegel, in welchem Falle die Durchschneidung eine Ellipse ist, oder sie durchschneidet die beiden Kegel in zwei krummen Linien knm, k'n'm'. Beide sind offene krumme Linien und erstrecken sich ins unendliche, wie die Parabel, wenn die Kegel selbst unendlich verlängert gedacht werden. Man betrachtet diese zwei krummen Linien als zwei verschiedene Zweige einer einzigen krummen Linie, welche man H y p e r b e l nennt.

Dreizehnter Abschnitt.

Von der Kugel.



Eine Kugel AMDVEO ist ein runder Körper, welcher von einer krummen Fläche umschlossen wird, deren Punkte alle gleich weit von einem innern Punkte C entfernt sind, den man den Mittelpunkt nennt.

Jede gerade Linie MC, die einen Punkt M auf der Kugelfläche mit dem Mittelpunkte verbindet, ist ein Halbmesser oder Radius, und jede gerade Linie MV, die durch den Mittelpunkt geht, und deren beide Endpunkte auf der Kugel liegen, ist ein Durchmesser oder Diameter.

Eine Kugelfläche entsteht, wenn eine Halbperipherie sich um ihren Durchmesser umdreht und in allen Raumtheilen, durch die sie geht, ihre Spur zurückläßt. Der Durchmesser um welchen die Drehung gedacht wird, heißt dann die Axe der Kugel, und seine Endpunkte heißen die Pole. Jeder Punkt auf einer Kugel kann als ein Pol und jeder Durchmesser als eine Axe gedacht werden.

Wenn eine Kugel mit einer Ebene durchschnitten wird, so ist die Durchschneidungslinie OIMK eine Kreislinie, deren Mittelpunkt im Punkt N ist, auf welchen die senkrechte Linie

CN fällt, die vom Mittelpunkt der Kugel auf die durchschneidende Ebene gefällt wird. Denn verbindet man den Punkt N mit irgend einem Punkt M auf der Durchschneidungslinie durch eine gerade Linie MN, so ist diese eine Kathete eines rechtwinklichen Dreieckes NMC, dessen Hypoteuse CM der Halbmesser der Kugel, und dessen andere Kathete NC die von dem Mittelpunkt auf die durchschneidende Ebene gefällte Senkrechte ist; da nun diese zwei Theile für alle auf dieselbe Weise gebildeten Dreiecke dieselben sind, so sind auch alle Punkte auf der Durchschneidungslinie gleich weit vom Punkte N entfernt; folglich ist diese Durchschneidungslinie eine Kreisperipherie.

Geht die Durchschneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel selbst, so ist die Durchschneidungslinie ebenfalls ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem der Kugel zusammenfällt, und dessen Halbmesser, dem der Kugel gleicht. Für jede Durchschneidende Ebene, welche nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ist der Halbmesser MN, als Kathete des rechtwinklichen Driecke NMC kleiner als der Halbmesser der Kugel, welcher die Hypotenuse dieses Dreieckes ist, und zwar ist, wie man leicht einsieht, der Halbmesser MN um so kleiner, je größer die Kathete NC ist, oder je weiter der Mittelpunkt N vom Mittelpunkt C der Kugel absteht.

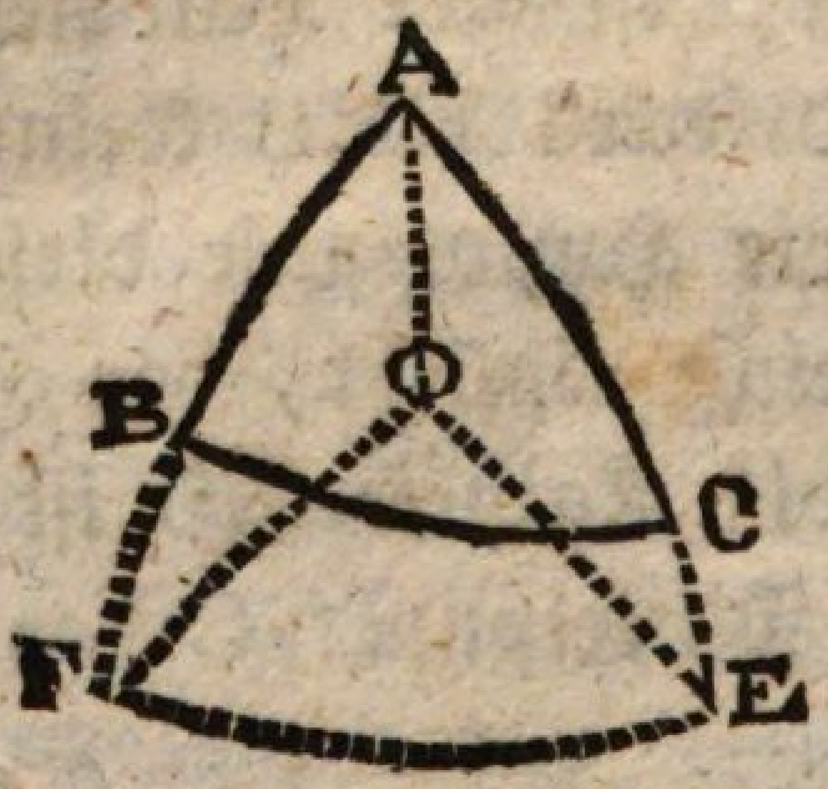
Jede auf einer Kugelfläche gezeichnete Kreislinie, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt, heißt ein großer Kreis oder Normalkreis, jede andere Kreislinie auf der Oberfläche einer Kugel heißt ein kleiner Kreis. Ein solcher Kreis hat dieselben Pole als der Normalkreis, mit dem er parallel ist.

Durch irgend zwei Punkte auf einer Kugelfläche kann man einen Normalkreis ziehen, aber nicht mehr als einen, weil die schneidende Ebene durch die zwei Punkte auf der Oberfläche und den Mittelpunkt der Kugel vollkommen bestimmt ist.

Alle Normalkreise einer Kugel halbiren einander, indem jeder alle übrigen in einem Durchmesser durchschneidet.

Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche einer Kugel ist der Bogen des Normalkreises, welcher durch beide Punkte geht.

Um mit einem Zirkel auf einer Kugel einen Normalkreis zu beschreiben, muß man zuerst einen beliebigen Punkt auf der Kugel zum Pol wählen, und aus demselben als Mittelpunkt mit einer Zirkelöffnung, welche der Sehne eines Quadraten des Normalkreises gleicht, auf der Kugelfläche eine Peripherie beschreiben. Sind aber zwei Punkte auf der Oberfläche der Kugel gegeben, durch welche der Normalkreis gezogen werden soll, so muß zuerst der Pol des verlangten Normalkreises bestimmt werden. Man findet ihn, wenn man aus jedem der zwei gegebenen Punkten als Pol einen Normalkreisbogen beschreibt, welche zwei Bogen sich im Pole durchschneiden werden.



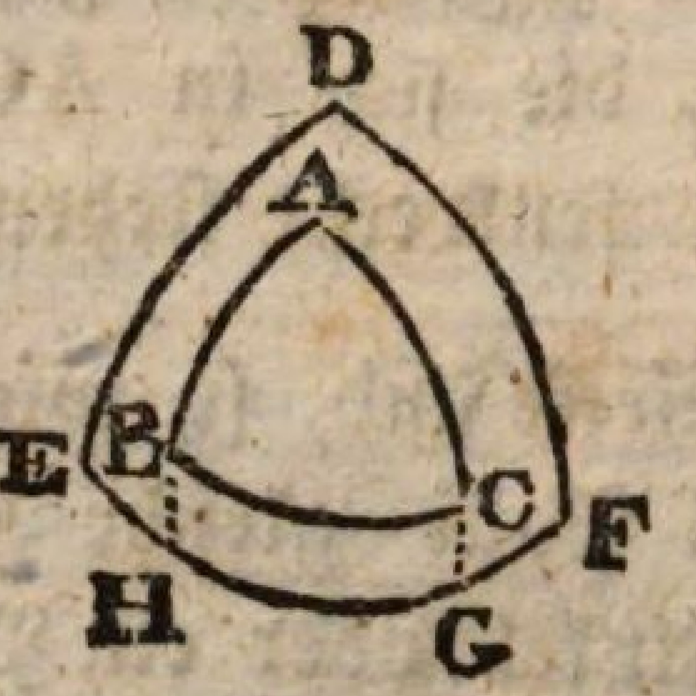
Wenn drei Normalkreise sich auf der Oberfläche einer Kugel in drei Punkten A, B, C, durchschneiden, so bilden sie ein Dreieck ABC, welches man ein sphärisches Dreieck nennt. In einem solchen Dreiecke sind, wie in einem geradlinigen, sechs Stücke zu betrachten: Drei Seiten und drei Winkel; aber unter einem sphärischen Winkel A versteht man die gegenseitige Neigung der Ebenen der Normalkreise, die sich in A durchschneiden. Um einen sphärischen Winkel A zu messen, verlängert man die zwei Bogen, welche ihn bilden bis in E und in F, so daß AE $=$ AF $=$ 90°, und verbindet die Punkte E und F durch einen Normalbo-

gen EF, welcher das Maaß des Winkels A seyn wird; denn verbindet man den Mittelpunkt O der Kugel mit A,E und F, so ist W. EOF ein Centriwinkel, der auf dem Bogen EF ruht und giebt zugleich die gegenseitige Neigung der zwei Normalkreise an, die sich in AO durchschneiden, weil EO und FO auf AO senkrecht stehen müssen.

Zwei späriſche Dreiecke sind, so wie die geradlinigen, Congruent, wenn sie zwei Paar gleiche Seiten und ein Paar gleiche eingeschlossene Winkel oder ein Paar gleiche Seiten und zwei Paar gleiche anliegende Winkel, oder drei Paar gleiche Seiten haben, wie man leicht durch das Aufeinanderlegen beweisen kann. Wenn in diesen Fällen aber die gleichen Seiten nicht gleichliegend sind, so sind die Dreiecke nicht congruent sondern bloß symmetrisch, in welchem Falle sie nicht auf einander gelegt werden können, aber doch gleichen Flächeninhalt haben.

Die Summe zweier Seiten AB,AC eines sphärischen Dreieckes ABC ist immer größer als die dritte Seite BC allein, und die drei Seiten zusammen sind weniger als ein Normalkreis. Um diesen letztern Satz zu beweisen, verlängere man die Seiten AB und AC, bis sie sich in D wieder durchschneiden, so sind BD und CD zusammen größer als BC; daher BD, CD, AB und AC zusammen, oder die Halbkreise ABD und ACD zusammen größer als AB, AC und

BC zusammen; aber ABD und ACD zusammen bilden einen Normalkreis; folglich sind die drei Seiten des Dreieckes ABC zusammen weniger als ein Normalkreis.



Wenn man die drei Spitzen eines sphärischen Dreieckes ABC als Pole nimmt und aus denselben drei Normalbogen beschreibt, die sich einander in den Punkten D, E, F durchschneiden, so heißt das daraus entstehende Dreieck DEF das Polardreieck des Dreieckes ABC. Das Dreieck ABC ist auch umgekehrt ein Polardreieck für DEF; denn der Punkt E ist, als zum Bogen ED gehörig, um 90° von C und als zum Bogen EF gehörig um 90° von A entfernt und ist also der Pol vom Bogen AC; so läßt sich auch zeigen, daß D der Pol von BC und F von AB ist.

Da F der Pol des Bogens AB ist, so ist der Bogen HF = 90°; der Bogen EG ist ebenfalls = 90°; es ist also EG + FH = 180°; aber EG + FH besteht aus den Bogen EH und FG und zweimal dem Bogen GH, oder auch aus den Bogen EF und GH; mithin ist EF dasjenige was dem Bogen GH an 90° fehlt; GH ist aber das Maaß des Winkels A; es ist also bewiesen, daß jedem Winkel eines sphärischen Dreieckes die gegenüberliegende Seite seines Polardreieckes an 180° fehlt.

Es folgt hieraus, daß die drei Winkel eines sphärischen Dreieckes immer mehr als zwei rechte Winkel zusammen enthalten; denn es fehlt ihnen zusammen an sechs rechten Winkeln die Summe der drei Seiten des Polardreieckes und diese sind weniger als 360° zusammen.

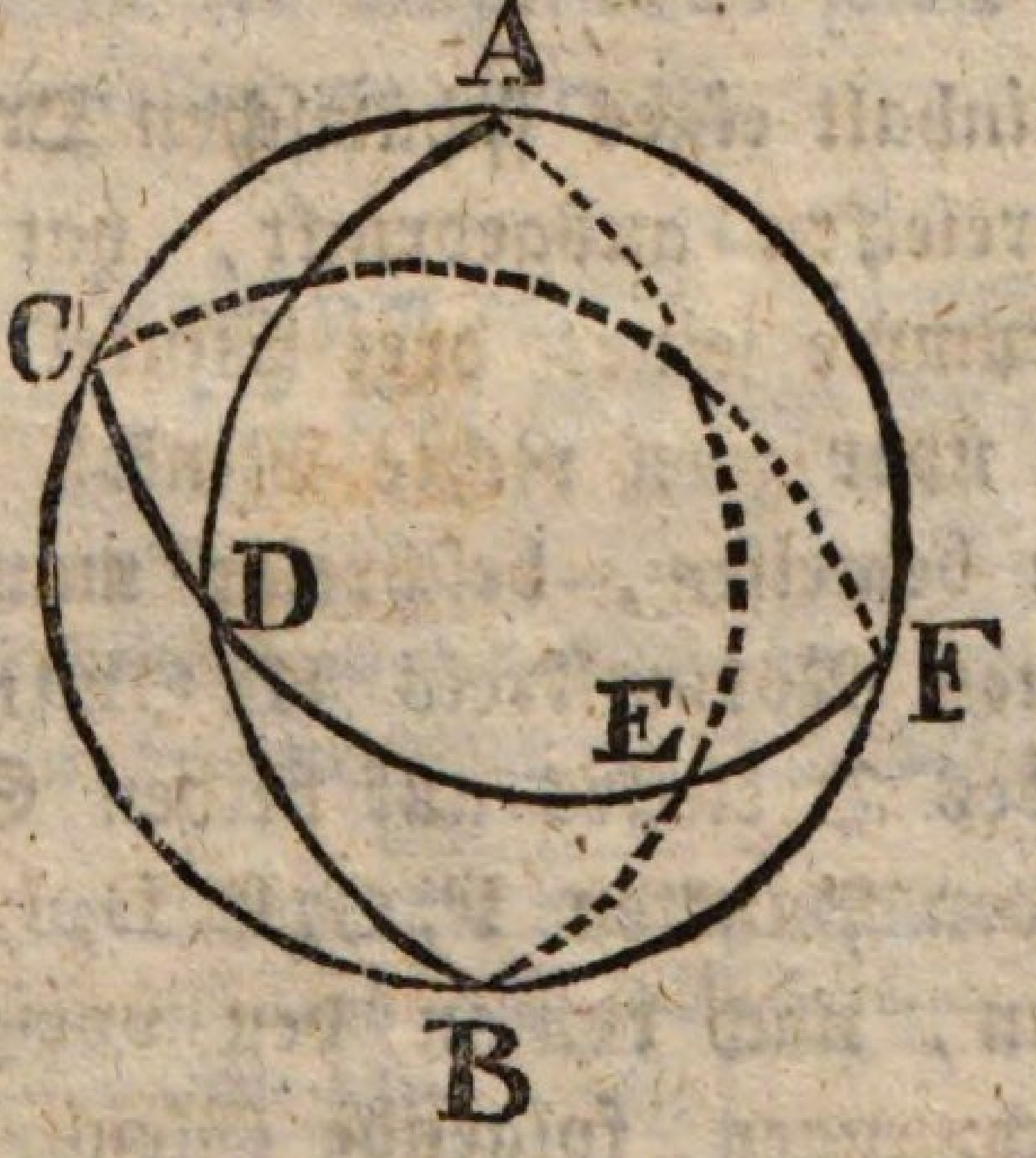
Da die Summe der drei Winkel eines sphärischen Drei-

eckes immer mehr als 180° ist. So kann auch ein sphärisches Dreieck doppelt und sogar dreifach rechtwinklig seyn. Zieht man auf einer Kugelfläche drei Normalkreise, von welchen jeder die zwei andern senkrecht durchschneidet, so wird dadurch die Kugelfläche in acht dreifach rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Ein solches dreifach rechtwinkliges Dreieck wird als die Maaßeinheit der Kugelfläche betrachtet; wenn man demnach von einem sphärischen Drei- oder Vieleck sagt, es enthalte z. B. $\frac{3}{4}$, so versteht man darunter, es enthalte drei Mal den vierten Theil eines dreifach rechtwinkligen Dreieckes.

Nach dieser Bestimmung gleicht die Oberfläche eines Kugelausschnittes, oder der Theil einer Kugelfläche, welcher zwischen zwei halben Normalkreisen enthalten ist, zwei Mal dem Winkel, den die zwei Normalkreise mit einander machen, in rechten Winkeln ausgedrückt; den der Flächeninhalt des Ausschnittes verhält sich offenbar zu dem der ganzen Kugel, welcher durch 8 ausgedrückt ist, wie der Winkel des Ausschnittes zu vier rechten Winkeln. Bezeichnet man nun den Flächeninhalt des Ausschnittes durch f und seinen Winkel durch A, so hat man die Proportion:

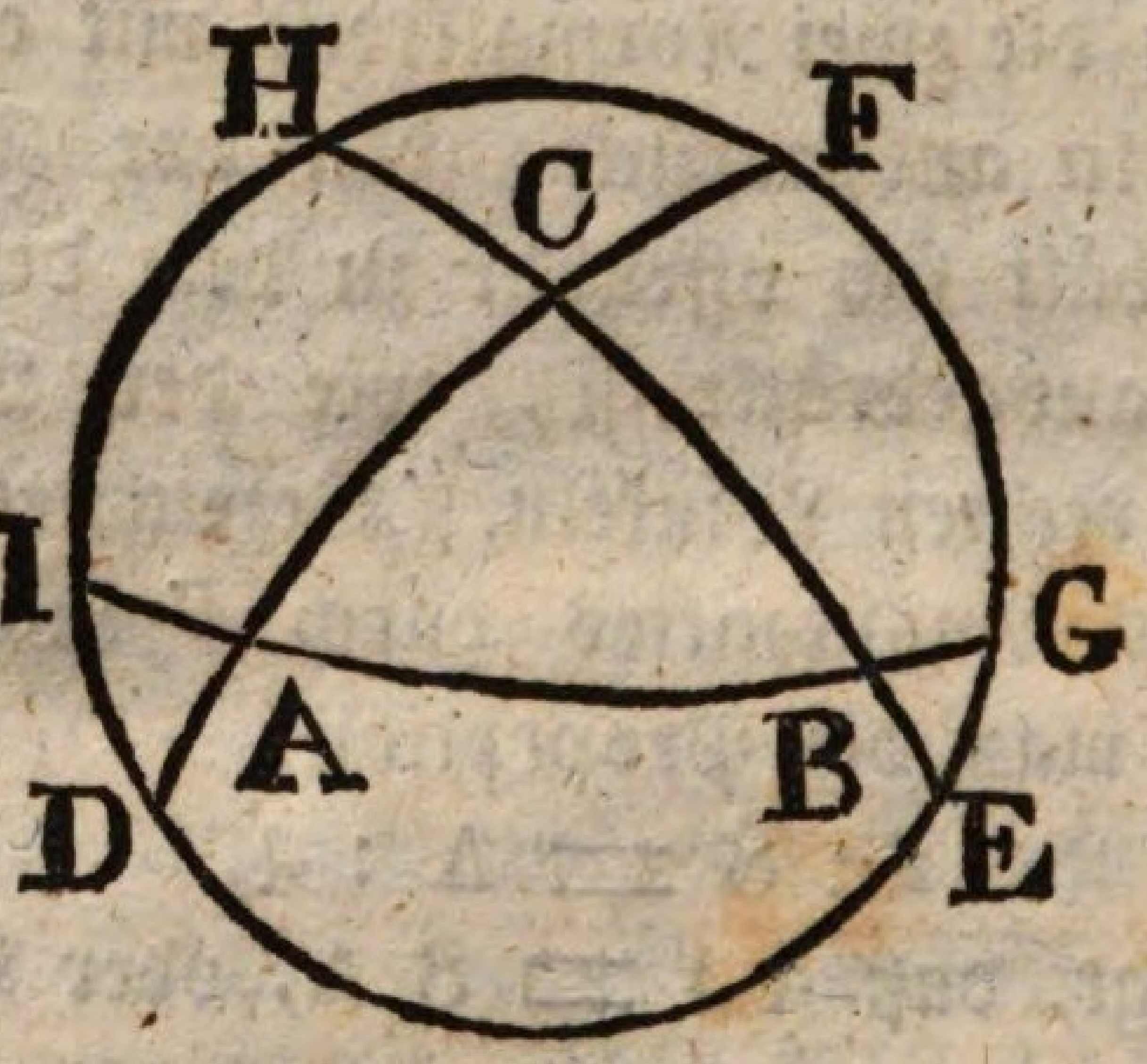
$$f : 8 = A : 4,$$

woraus denn folgt, daß $4f = 8A$, oder $f = 2A$.



Wenn zwei Normalkreise, die zwei Kugelausschnitte ACBD, AEBF bilden, von einem dritten Normalkreis CDEF durchschnitten werden, so enthalten die zwei sphärischen Dreiecke

ACD, AEF zusammen so viel, als einer jener beiden Kugelausschnitte. Um dies zu beweisen, muß gezeigt werden, daß das Dreieck CBD, welches dem Dreiecke ACD an dem Ausschnitte ACBD fehlt, so groß ist als das Dreieck AEF; diese zwei Dreiecke sind aber wirklich gleich, denn sie haben zwei Paar gleiche Seiten und ein Paar gleiche eingeschloßne Winkel. Die Seite AE nämlich gleicht der Seite BD, weil beiden der Bogen AD an einer halben Peripherie fehlt. Die Seite AF gleicht der Seite BC aus einem ähnlichen Grunde und der Winkel EAF wird aus denselben Ebenen gebildet, als der Winkel DBC. Es folgt hieraus, daß der Gesammtflächeninhalt der zwei Dreiecke CAD, EAF das Doppelte des in rechten Winkeln ausgedrückten Winkels A zum Maaße hat.



Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes, in dreifach rechtwinkligen Dreiecken ausgedrückt, hat zum Maaß den Ueberschuß der Summe seiner drei Winkel (in rechten Winkeln ausgedrückt) über zwei rechte Winkel.

Um dies zu beweisen, beschreibe man auf der Kugelfläche irgend einen Normalkreis HFGEDI und verlängere die drei Seiten des Dreieckes auf beiden Seiten, bis sie den Normalkreis in den Punkten F, G, E, D, I, H durchschneiden. Man hat alsdann, nach den in den vorigen Sätzen angenommenen Bezeichnungen, folgende Gleichungen:

$$HCF + DCE = HCF + ABC + ABED = 2\ C,$$
$$GBE + HBI = GBE + ABC + ACHI = 2\ B,$$
$$IAD + FAG = IAD + ABC + BCFG = 2\ A.$$

Betrachtet man genau die Theile, welche in diesen Gleichungen vorkommen, so findet man darunter alle Theile der durch den Normalkreis gebildeten Halbkugel ein Mal, das Dreieck ABC aber drei Mal; sie enthalten also zusammen eine Halbkugel und zwei Mal das Dreieck ABC, und in dreifach rechtwinklichen Dreiecken ausgedrückt ist ihr Flächeninhalt $4 + 2\,ABC$, folglich ist $4 + 2\,ABC = 2\,A + 2\,B + 2\,C$, oder $2 + ABC = A + B + C$; d. h. der Flächeninhalt des Dreieckes, um 2 vermehrt, gleicht der Winkelsumme, oder der Flächeninhalt gleicht dem Ueberschuß der Winkelsumme über zwei rechten Winkeln.

Jedes sphärische Vieleck kann in so viele sphärische Dreiecke zerlegt werden, als es Seiten hat, weniger zwei; folglich ist der Flächeninhalt eines sphärischen Vieleckes in dreifach rechtwinkligen Dreiecken ausgedrückt, so groß als der Ueberschuß seiner Winkelsumme über so viel Mal zwei rechte Winkel, als das Vieleck Seiten hat, weniger zwei.

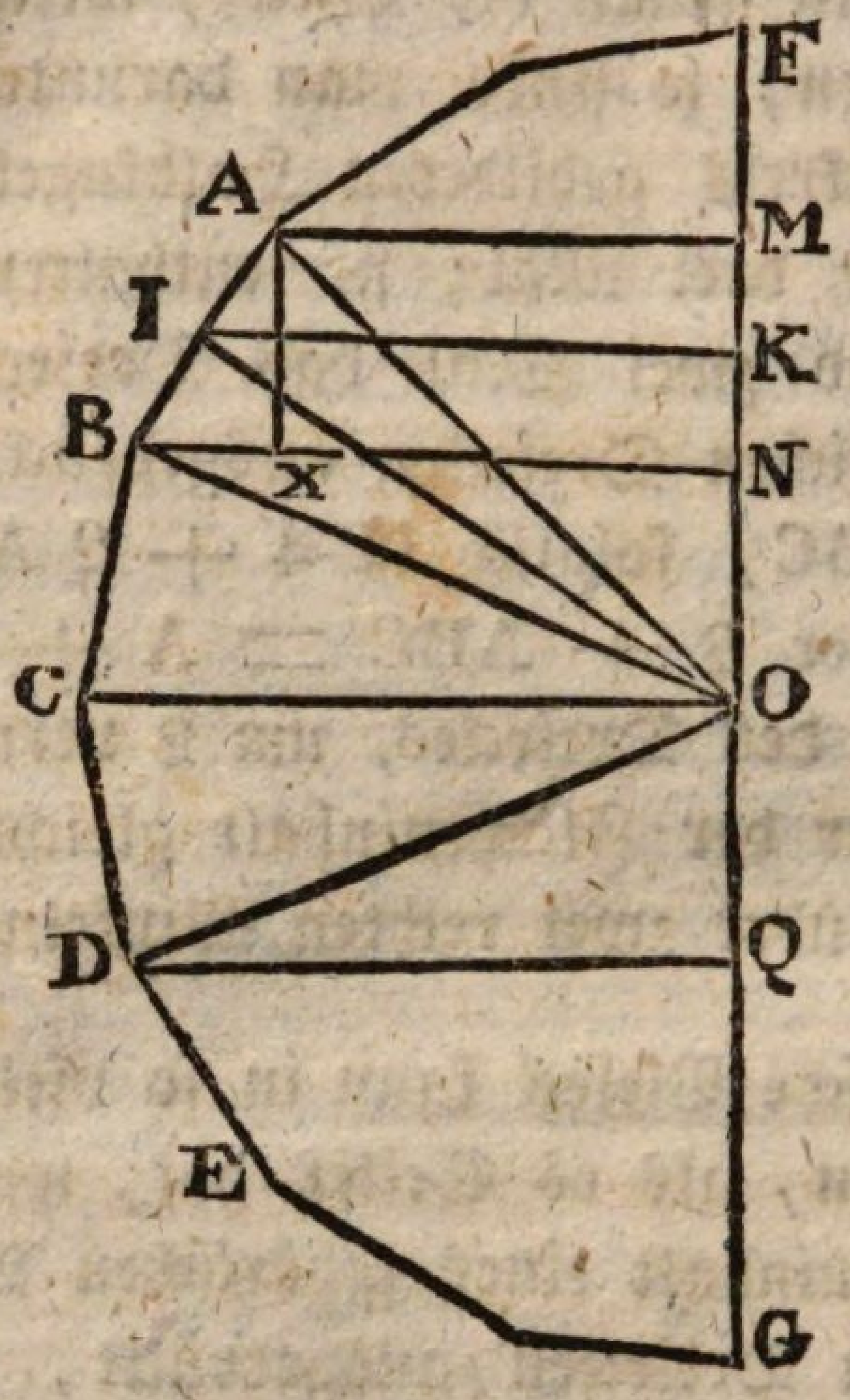
Man ist nun in den Stand gesetzt, das Verhältniß jeder auf der Kugel gezeichneten, durch Normalbogen eingeschlossenen Figur zum dreifach rechtwinkligen Dreieck, oder auch zur ganzen Kugelfläche zu berechnen, und es bleibt nur noch die Frage, wie man die Kugelfläche selbst finde, wenn der Halb- oder Durchmesser gegeben ist.

Welches Verhältniß zum dreifach rechtwinkligen Dreieck hat ein sphärisches Dreieck, das folgende Winkel hat: 75° 12′, 48° 36′, 96° 15′?

Welches Verhältniß zu der Oberfläche der Kugel hat ein sphärisches Fünfeck, in welchem jeder Winkel 130° hat?

Wie viel Quadratfuß hält ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel 48° 12′, 125° 36′ und 96° 24′ halten, wenn die Oberfläche der ganzen Kugel 24□′ hält?

Wie viel Quadratfuß hält ein sphärisches Viereck, in welchem jeder Winkel 115° hat; wenn die Oberfläche der ganzen Kugel 56□′ 75□″ hält?



Die Oberfläche einer Kugel läßt sich mit der eines Körpers vergleichen, welcher entsteht, wenn sich die eine Hälfte eines regulären Vieleckes wie FABCDEG um den Durchmesser FG des Vieleckes als Axe herumdreht; denn wenn man sich denkt, die Seitenzahl des Vieleckes sey unendlich groß, so ist der entstehende Körper eine Kugel. Jede einzelne Seite des Vieleckes wie AB beschreibt bei ihrer Bewegung einen abgestumpften Kegel, der zwischen zwei Kreisflächen enthalten ist, deren Durchmesser die Senkrechten AM und BN sind, und man findet seine Oberfläche, wenn man die halbe Summe der beiden Peripherien mit der Seite AB multiplizirt, oder auch, wenn man die halbe Summe der Seiten AM und BN mit der Seite AB und das Produkt mit 2π multiplizirt. Nimmt man nun den Punkt I in der Mitte von AB und zieht die Senkrechte IK, so wird IK so groß seyn, als die halbe Summe der zwei Senkrechten AM und BN und der Flächeninhalt des abgestumpften Kegels läßt sich durch folgende Formel ausdrücken: $2\pi \times IK \times AB$.

Das Produkt $IK \times AB$ läßt sich durch ein anderes

Produkt ersetzen, welches die Berechnung der Gesammtfläche des Umdrehungskörpers erleichtert. Zu diesem Ende ziehe man IO und die Senkrechte AX, so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke ABX, IKO, die einander ähnlich sind, weil sie drei Paar gleiche Winkel haben; denn W. AXB = W. IKO als rechte Winkel, und W. BAX = W. KIO, weil beiden W. AIK an 90° fehlt. Man zieht hieraus die Proportion IK : AX = IO : AB; daher IK × AB = IO × AX, oder auch IK × AB = IO × MN. Der Flächeninhalt des durch die Seite AB beschriebenen, abgestumpten Kegels kann also auch durch 2 π × IO × AX ausgedrückt werden. Nun ist aber 2 π × IO die Peripherie des in dem regulären Vielecke eingeschriebenen Kreises; folglich ist die Fläche eines jeden, durch eine Seite des Vieleckes beschriebenen abgestumpften Kegels die Peripherie des eingeschriebenen Kreises, multiplizirt mit der Höhe des abgestumpften Kegels; die Gesammtoberfläche des beschriebenen Körpers ist demnach das Produkt jener Peripherie mit der Gesammthöhe der abgestumpften Kegel, welche selbst der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises ist. Hat nun das beschreibende Vieleck eine unendlich große Seitenzahl, so daß der beschriebene Körper eine Kugel ist, so fällt das Vieleck mit seinem eingeschriebenen Kreise zusammen, welcher ein Normalkreis der Kugel wird; mithin gleicht die Oberfläche einer Kugel dem Produkte der Peripherie eines Normalkreises mit dem Durchmesser desselben. Ist der Halbmesser einer Kugel = r, so ist die Peripherie der Normalkreises = 2 π r, und der Durchmesser = 2 r; folglich ist die Oberfläche der Kugel 2 π r × 2 r, oder 4 πr^2, und da der Flächeninhalt eines Normalkreises πr^2 ist, so folgt daraus daß die Oberfläche einer Kugel vier mal so groß ist, als die ihres Normalkreises.

Wenn eine Kugel beschrieben werden soll, die eine gegebene Oberfläche habe, so findet man den Halbmesser, wenn man die gegebene Zahl durch 4 π dividirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser 2′ 5″ hat?

Wie viel Quadratfuß hat die Oberfläche einer Kugel, wenn der Normalkreis 5′ 6″ im Umfange hat?

Wie viel Quadratmeilen hat die Oberfläche der Erde, deren Normalkreise 5400 Meilen im Umfange haben?

Welchen Durchmesser muß man einer Kugel geben, deren Oberfläche 5□′ 76□′ enthalten soll?

Wie groß ist die Peripherie eines Normalkreises, wenn die Oberfläche der Kugel 8□′ hält?

Die Oberfläche einer Zone oder des Theiles von der Oberfläche einer Kugel, welcher zwischen zwei parallelen Kreisen enthalten ist, kann als bestehend aus unendlich vielen kleinen abgestumpften Kegeln von unendlich kleiner Höhe betrachtet werden. Man findet demnach ihre Oberfläche, wenn man die Peripherie eines Normalkreises mit der Gesammthöhe der abgestumpften Kegel oder mit der Höhe der Zone multiplizirt. Die Höhe einer Zone ist die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der zwei Kreise verbindet, zwischen welchen die Zonen enthalten ist; denn diese Linie steht auf beiden Kreisen senkrecht.

Wie groß ist der Flächeninhalt einer sphärischen Zone, wenn die Halbmesser der zwei sie einschließenden Kreise 2′ 4″ und 3′ 8″ sind die Kugel selbst aber 4′ 6″ im Durchmesser hat?

N. B. Man muß hier zuerst die Höhe der Zone berechnen, zu welchem Ende man die Entfernungen der beiden Mittelpunkte der einschließsenden Kreise von dem Mittelpunkte der Kugel suchen muß. Eine solche Entfernung ist aber eine Kathete in einem rechtwinklichen Dreiecke, dessen Hypotenuse der Halbmesser der Kugel, und dessen zweite Kathete der Halbmesser des Kreises ist, wie die Fig. S. 114 deutlich zeigt. Uebrigens werden die Entfernungen der zwei Mittelpunkte vom Mittelpunkte der Kugel bald addirt, bald von einander abgezogen, je nachdem der Mittelpunkt der Kugel zwischen beiden Kreisen oder außerhalb derselben liegt.

Wie viel Quadratfuß enthält eine Zone zwischen zwei Kreisen, deren Halbmesser 25″ ist, wenn die Kugel 3′ 8″ im Durchmesser hat?

Um den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden, denke man dieselbe von einem Netze umzogen, das aus lauter Normalbogen gebildet ist, und die Kugelfläche in unzäh-

lig viele, sehr kleine, drei- oder viereckige Zellen zerlegt. Diese Zellen können dann wegen ihrer unmerklichen Krümmung als ebene Figuren betrachtet werden. Verbindet man nun den Mittelpunkt der Kugel mit allen Durchschnittspunkten des Netzes, so wird dadurch die Kugel in unzählig viele Pyramiden zerlegt, deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser der Kugel ist. Da nun die Grundflächen dieser Pyramiden zusammen die Oberfläche der Kugel bilden, so findet man ihren Gesammtinhalt, wenn man die Oberfläche der Kugel mit ihrem Halbmesser multiplizirt und ein Drittel vom Produkt nimmt. Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel durch r, so ist die Oberfläche $4 \pi r^2$ und der körperliche Inhalt $4 \pi r^2 \times \frac{r}{3}$, oder $\frac{4}{3} \pi r^3$. Man findet also den körperlichen Inhalt einer Kugel, wenn man den Würfel des Halbmessers mit der Zahl π und das Produkt mit $\frac{4}{3}$ multiplizirt.

Ist der körperliche Inhalt einer Kugel gegeben, so findet man den Halbmesser durch ein entgegengesetztes Verfahren: Man multiplizirt nämlich das Gegebene mit $\frac{3}{4}$, dividirt dann durch π und zieht aus dem Herauskommenden die Kubikwurzel.

Wie viel Kubikfuß hält eine Kugel, deren Durchmesser 5′ 6″ hält?

Wie viel Kubikfuß hält eine Kugel, deren Normalkreise 12′ im Umfange haben?

Wie viel Kubikfuß hält eine Kugel, deren Oberfläche 25□′ hält?

Wie groß muß der Halbmesser einer Kugel seyn, die 64 Kubikzoll hält?

Wie viel wiegt eine eiserne Kugel von 9″ Durchmesser, wenn die specifische Schwere 7,102 ist?

Wie groß ist der Durchmesser einer 24pfündigen, eisernen Kugel von obiger spezifischer Schwere?

Wenn man auf einer Kugelfläche irgend eine Figur zeichnet, und alle Punkte dieser Figur mit dem Mittelpunkte der Kugel durch Halbmesser verbunden denkt, so entsteht daraus ein Körper, den man als eine sphärische Pyramide be-

trachten kann, wenn die Figur ein Vieleck, und als einen sphärischen Kegel oder Kugelausschnitt, wenn der Umfang der Figur eine Kreislinie ist. Der körperliche Inhalt, wird jedes Mal gefunden, wenn man den Flächeninhalt der Figur mit dem Drittel vom Halbmesser der Kugel multiplizirt.

Wie viel Kubikfuß hält ein Kugelausschnitt, wenn der Kreis, durch welchen er gebildet wird, 21″, die Kugel selbst aber 28″ im Durchmesser hat?

Wie viel Kubikfuß hält ein Kugelausschnitt, wenn der ihn bildende Kreis 15″ vom Mittelpunkte der Kugel entfernt ist, und die Kugel 4′ 6″ im Durchmesser hat?

Wie groß ist der körperliche Inhalt einer sphärischen Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, wenn jeder Winkel in diesem Dreiecke 84″ und die Kugel 20″ im Durchmesser hat?

Jeder Theil, welcher von einer Kugel durch eine Ebene abgeschnitten wird, welche nicht durch den Mittelpunkt geht, heißt ein Kugelabschnitt. Ein solcher Kugelabschnitt ist das, was übrig bleibt, wenn man von einem Kugelausschnitt den Kegel abschneidet, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel, und dessen Grundfläche der Kreis ist, durch welchen der Kugelabschnitt gebildet wird. Man kann demnach den körperlichen Inhalt finden, wenn der Halbmesser der Kugel und der des kleinen Kreises gegeben sind.

Der körperliche Inhalt einer Zone ist als der Unterschied zweier Kugelabschnitte anzusehen und kann demnach berechnet werden, wenn der Halbmesser der Kugel und die der beiden Kreise, zwischen welchen die Zone enthalten ist, gegeben sind.

Inhalt.

Erster Abschnitt.	Seite.
Von der geraden Linie und den Winkeln	1
Zweiter Abschnitt.	
Von den Parallellinien und ihren Verbindungen mit den senkrechten und schiefen Linien	7
Dritter Abschnitt.	
Vom Kreis	13
Vierter Abschnitt.	
Von den geradlinigen Figuren	21
Fünfter Abschnitt.	
Von den gleichen, symmetrischen und ähnlichen Figuren .	37
Sechster Abschnitt.	
Vom Flächeninhalte der auf Ebenen gezeichneten Figuren, welche von geraden Linien oder von Kreislinien eingeschlossen sind	47
Siebenter Abschnitt.	
Von der Ebene	61
Achter Abschnitt. Darstellende Geometrie.	
Vom Punkte, der geraden Linie und der Ebene	66
Neunter Abschnitt.	
Von der perspektivischen Darstellung	82
Zehnter Abschnitt.	
Von den durch Ebenen begränzten Körpern	89
Eilfter Abschnitt.	
Vom Cylinder	100
Zwölfter Abschnitt.	
Vom Kegel	106
Dreizehnter Abschnitt.	
Von der Kugel	114

Staatl. Bibliothek Passau

OS

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Creizenach, Michael, 1789-1842

Elementarlehre der technischen Geometrie zum Gebrauche für Bürger- und Gewerbschulen

Bd.: 1

Frankfurt am Main 1829

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 59-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346058-7